שיטות 1 - סיכום

פונקציות מרוכבות

I פעולות בסיסיות

1) $z = x+iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

2) $z_1+z_2 = (x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

3) $z_1\cdot z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\cdot z_2^*}{z_2\cdot z_2^*} = \frac{z_1\cdot z_2^*}{|z_2|^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

5) $z^* = x-iy = re^{-i\theta}$

6) $z^n = |z|^n e^{in\theta} = r^n e^{in\theta}$

7) $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

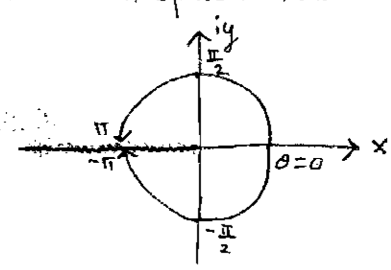
8) $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

9) $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

10) $\log(z) = \log(re^{i\theta}) = \log(r)+i(\theta+2\pi n)$

לפונקצית ה-log יש בעיה של רב-ערכיות. כדי לעבוד עם הפונקציה הזו מגדירים קו-חיתוך, אותו הפונקציה לא יכולה לחצות. עבור פונקצית ה-log, למשל:

רק מגדירים תחום זוויות $-\pi<\theta<\pi$ בו $\log(z)$ הוא פונקציה חד-ערכית שלא מוגדרת על קו-החיתוך.



II גזירה של פונקציות מרוכבות

כל פונקציה מרוכבת שתלויה ב- x,y ניתן להפריד לחלק ממשי ולחלק מדומה: $W(z)=u(x,y)+iV(x,y)$.

כדי שלפונקציה $W(z)$ תהיה נגזרת בנק' z_0 מסלולי אינטגרציה שונים צריכים לתת את אותה התוצאה. מכאן נובעים תנאי קושי-רימן לאנליטיות:

$$Re[W'(z)] = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$Im[W'(z)] = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

פונקציה אנליטית היא פונקציה $f(z)$ שגזירה בסביבה קטנה ופתוחה סביב z_0. זה אומר שבתוך העיגול אין קוי חיתוך או נק' סינגולריות.

אם $f(z)$ אנליטית בכל המישור המרוכב, אזי $f(z)$ נקראת פונקציה שלמה. הפונקציות e^z, z, z^2, z^n הן אנליטיות ושלמות.

- משוואת לפלס:

משוואת לפלס אומרת שעבור פוטנציאל חשמלי φ באזור חסר מטענים מתקיים $\nabla^2\varphi=0$.
אם $W(z)$ מקיימת את תנאי קושי-רימן, החלק הממשי U והחלק המדומה V של W מקיימות כל אחת לחוד את משוואת לפלס: $\nabla^2 U=\nabla^2 V=0$. זה נכון רק במישור.

אם מתקיימים תנאי קושי-רימן (W אנליטית) $\Leftarrow$ U,V הרמוניות.

אם U,V הרמוניות וקושי-רימן מתקיימים $\Leftarrow$ W גזירה בתחום (אנליטית).

- נגזרת: כל הפונקציות האלמנטריות (חזקה, אקספוננט, טריגו') נגזרות לפי אותם חוקים של הפונקציות הממשיות.

- עוד על אנליטיות: פונקציות שמורכבות, בין היתר, מפונקציות לא אנליטיות - גם הן פונקציות לא-אנליטיות. אבל, אם עובדים במישור של פונקציה לא-אנליטית, כן אפשר יהיה להגדיר פונקציות אנליטיות באותו מישור. $W(z^*)=(z^*)^2$, למשל, תהיה אנליטית במישור z^*. הבעיה נוצרת בשילוב של פונקציות אנליטיות עם פונקציות לא-אנליטיות.

III העתקות

העתקות מוביוס: משפחה של העתקות שלוקחות מעגלים וישרים למעגלים וישרים אחרים. $\Leftarrow \boxed{W=\frac{az+b}{cz+d}}$ כדי להבין מה עושה העתקה כזו לישר/מעגל מספיק לבדוק שלוש נקודות. בד"כ לוקחים את הנקודות שמתנהגות כך: $z_1\to 0$, $z_2\to 1$, $z_3\to\infty$. בצורה זו אפשר למצוא פונקציות הפוכות:

$$z_1 \xrightarrow{g} 0 \xleftarrow{f} W_1 \quad , \quad z_2 \xrightarrow{g} 1 \xleftarrow{f} W_2 \quad , \quad z_3 \xrightarrow{g} \infty \xleftarrow{f} W_3$$

IV אינטגרלים במישור המרוכב

1) השיטות הפשוטות

כשמסתכלים על אינטגרל מסלולי במישור המרוכב, אפשר לחלק את המסלול לתת-קטעים ולעשות אינטגרל על כל אחד מהם (בדיוק כמו שעושים במישור הממשי). במקרים כאלה צריך לשים לב לשני דברים:

א) כיוון המסלול: $\boxed{\oint_c f(z)dz=-\oint_c f(z)dz}$

ב) פרמטריזציה: לפעמים יהיה קל יותר להגדיר את המסלול בצורה פרמטרית (אם המסלול מעגלי, למשל, אפשר להגדיר $z=a+re^{i\theta}$ ולפתור על $\theta:0\to\theta_0$).
באופן כללי נכתוב: $\boxed{\int_{z_a}^{z_b} f(z)dz=\int_{t_a}^{t_b} f[z(t)]\frac{dz}{dt}dt}$

2) <u>משפט אינטגרל קושי</u>

אם $f(z)$ אנליטית בתחום ורציפה על שפתו, אזי בהכרח: $\boxed{\oint f(z)dz = 0}$

ובמקרה כזה האינטגרל $\int_a^b f(z)dz$ לא תלוי במסלול.

<u>משפט מוררה</u>: המשפט ההפוך - אם $f(z)$ רציפה בתחום R ומתקיים $\oint_c f(z)dz=0$ על <u>כל</u> מסלול c בתחום, אזי $f(z)$ אנליטית בתחום.

3) <u>נוסחת האינטגרל של קושי</u>

אם $f(z)$ אנליטית בתחום ורציפה על שפתו, והנקודה z_0 נמצאת בתחום, אז כאשר מסלול האינטגרציה הוא <u>נגד</u> כיוון השעון, יתקיים: $\boxed{\oint \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)}$

אם המסלול הוא <u>עם</u> כיוון השעון, נקבל $-2\pi i f(z_0)$.

ניתן לאחד את שני המשפטים ולרשום:

$$\oint \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0) & z_0 \text{ פנימי} \\ 0 & z_0 \text{ חיצוני} \end{cases}$$

<u>שימוש באינטגרל קושי למציאת נגזרות של פונקציה אנליטית</u>

כמו שהכותרת מרמזת, אפשר להשתמש בנוסחת האינטגרל של קושי כדי למצוא את הנגזרת ה-n-ית של הפונקציה בנק' z_0:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

4) <u>משפט ליוביל</u>

אם $f(z)$ אנליטית <u>בכל</u> המישור המרוכב (שלמה) וחסומה ($|f(z)|<M$), אזי $f(z)$ <u>קבועה</u>.

המשפט ההפוך: אם $f(z)$ לא קבועה, אזי יש לה לפחות סינגולריות אחת.

$\boxed{V}$ <u>טור טיילור</u>

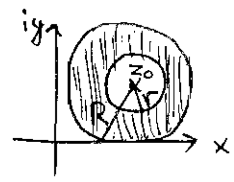
באופן דומה לטורי טיילור ממשיים, טורי טיילור מרוכבים ניתן לפתח עבור $f(z)$ בסביבת הנקודה z_0, רק אם $f(z)$ אנליטית ב-z_0: $\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \ a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)}$

את הטור מפתחים, בעצם, בתחום של עיגול שלם מסביב z_0, כאשר $f(z)$ אנליטית בתוך העיגול. כך מגדירים גם את <u>רדיוס ההתכנסות של הטור</u>: המרחק בין z_0 לבין z_1, כאשר z_1 הנקודה הקרובה ביותר ל-z_0 בה הפונקציה איננה אנליטית: $\boxed{R = |z_0 - z_1|}$

<u>טור לורן</u>

ל-$f(z)$ יש פיתוח מתכנס לטור לורן (חזקות חיוביות ושליליות) בתנאי שסביב z_0 (נק' הפיתוח הסינגולרית) יש טבעת מלאה שבה $f(z)$ אנליטית. הטבעת המלאה היא: $\boxed{r<|z-z_0|<R}$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \ a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \ \forall(n=0,\pm1,\pm2,\dots)}$$



לפי הגדרת רדיוס ההתכנסות $r<|z-z_0|<R$, אנו מקבלים שלושה מקרים:

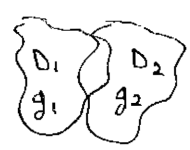
1) איזור לא אנליטי רק סביב z_0: במקרה זה $R\longrightarrow\infty$ ונקבל טור של חזקות שליליות: $a_n=0$, $f(z)=\sum\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$, כאשר $b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)(z-z_0)^n dz$.

2) פיתוח לטור טיילור במקרה פרטי: אם $r=0$, היינו $f(z)$ אנליטית ב-z_0, אז חזרנו לטור טיילור ברדיוס $|z-z_0|<R$ $\Leftarrow$ $b_n=0$, $f(z)=\sum a_n(z-z_0)^n$.

3) עיגול עם נקב: עיגול מלא, חוץ מנק' הסינגולריות z_0: $0<|z-z_0|<R$. יהיו חזקות חיוביות ושליליות.

$\boxed{\text{VI}}$ המשכה אנליטית

נסתכל על שתי פונקציות $g_1(z), g_2(z)$ שחופפות באזור מסוים.



אם $g_1(z)=g_2(z)$ באיזור החפיפה $D_1\cap D_2$, או אפילו קו בתוך $D_1\cap D_2$, אזי g_1 ו-g_2 הן אותה פונקציה והן המשכות אנליטיות האחת של השנייה.

בצורה כזו אפשר להשוות בין פונקציות שנראות שונות לגמרי (אם, למשל, כותבים את אותה הפונקציה פעם כטור ופעם כאינטגרל), או להמשיך פונקציות מהמישור הממשי למישור המרוכב. $f(x)=e^x$ ו-$f(z)=e^z=e^{x+iy}$ מתלכדות על ציר x, ולכן הן המשכה אנליטית זו של זו.

$\boxed{\text{VII}}$ משפט השארית וחשבון שארית

1) סוגים שונים של נקודות סינגולריות

א) נקודה סינגולרית מבודדת: נק' לא גזירה, אבל הפונקציה גזירה בכל סביבה קרובה ל-z_0 הסינגולרית. למשל, $f(z)=\frac{1}{(z-5i)^3}$. באופן כללי, לנק' סינגולרית מבודדת קיים טור לורן סביב z_0.

I) קוטב מסדר m: ניתן לפתח לטור לורן סביב z_0:

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\dots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+a_0+a_1(z-z_0)+\dots$$

ההתבדרות הנ' חזקה היא עבור הסדר m, ולכן $a_{-n}=0$ לכל $|n|>|m|$.

ניתן לקבל פונקציה אנליטית בכך שנסלק את האיבר הפוגע $(z-z_0)^{-m}$:

יוצרים פונקציה חדשה $g(z)$ שתהיה אנליטית: $g(z)=f(z)(z-z_0)^m$.

II) סינגולריות עיקרית: כל הסדרים עד $n=-\infty$ קיימים בטור לורן.

ג) נקודה סינגולרית לא מבודדת: למשל, קו חיתוך. נקודת הסיום של קו החיתוך נקראת נקודת חיתוך והיא נק' סינגולרית לא מבודדת. כיוון שאי-אפשר להקיף את נק' החיתוך בסביבה פתוחה, אי-אפשר לפתח סביבה טור לורן.

2) משפט השארית

אם לפונקציה $f(z)$ יש מספר סופי של נקודות סינגולריות מבודדות (עיקריות או קטבים) בתחום מסוים, אזי, כאשר N מס' הנק' הסינגולריות בתחום:

$$\boxed{\oint_c f(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{N} Res|_j}$$

כאשר $\boxed{Res|_j = a_{-1}|_j}$ הוא המקדם של התפקה $(z-z_0)^{-1}$ בטור לורן. עבור מספר נק' סינגולריות צריך לפתח טורי לורן סביב כל נקודה ומכל אחד מהם לקחת את $a_{-1}|_{z_0}$ באותה נקודה.

3) חישוב השאריות

א) ל-$f(z)$ יש קוטב פשוט (סדר ראשון ב-z): $Res|_{z_0} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot f(z)$

ב) $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$: אם המונה $p(z)$ אנליטי ולמכנה $q(z)$ יש אפס פשוט (כלומר, בנק' המפגש של הפולינום עם הרשית ניתן לייצג את הפולינום כ- $q(z)\sim a(z-z_0)$, כאשר a מקדם כלשהו), אזי ל-$f(z)$ יש קוטב פשוט. ואז, כל עוד $q'(z_0)\neq 0$: $Res|_{z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

ג) קוטב מסדר m: $Res|_{z_0} = \frac{1}{(m-1)!}\left\{\left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\right\}\Big|_{z=z_0}$

4) חישוב אינטגרלים ממשיים באמצעות פונקציות מרוכבות

א) אינטגרלים מסוימים על כל הציר הממשי: $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

I) כותבים שוב את $f(x)$ כ- $f(z)$ במישור המרוכב. חוקרים ומוצאים נקודות סינגולריות.

II) בונים מסלול סגור שמכיל את האינטגרל המקורי על הציר הממשי.

III) משתמשים במשפט השארית ובמשפט קושי כדי לחשב את האינטגרלים.

IV) מחשבים את השאריות ⇐ מחשבים את האינטגרל.

הערות

אינטגרלים מהצורה $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ אפשר לחשב ע"י השלמה של חצי מעגל עליון בשני תנאים:

1) מס' הנק' הסינגולריות בחצי המעגל העליון סופי.

2) $f(z)\sim\frac{1}{z^2}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$ עבור $|z|=R\to\infty$. כלומר, הפונקציה מתנהגת כמו $\frac{1}{z^2}$ או חזקה גבוהה יותר.

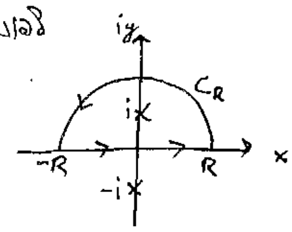
דוגמאות ספציפיות

נסתכל על שלוש דוגמאות בעלות צורות פתרון קצת שונות:

*) $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

1 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^2}$ עוברים להסתכל על הפונקציה המרוכבת:

לפונקציה $\frac{1}{1+z^2}$ שתי נק' סינגולריות ב- $z=\pm i$. שתיהן מבודדות.



2 בונים מסלול שמכיל את האינטגרל המקורי בקטע $[-R,R]$,

כאשר $R\longrightarrow\infty$. המסלול כולל רק את הסינגולריות $z=i$

3 $\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^2}+\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi i\,Res|_{z=i}$

4 האינטגרל על הקשת C_R כולל במכנה את z^2, ולכן מתאפס, לפי הערה 2.

5 $Res|_{z=i}=$ [קוטב פשוט] $=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)}{(1+z^2)}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)}{(z+i)(z-i)}=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)}=\frac{1}{2i}$

6 $\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi i\,Res|_{z=i}=\pi$

*) $I=\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}$

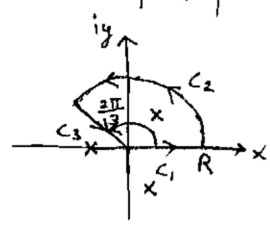
1 $I=\int_{0}^{\infty}\frac{dz}{1+z^3}$ לפונקציה נק' סינגולריות ב: $z=e^{i\frac{\pi}{3}},\ e^{i\pi},\ e^{i\frac{5\pi}{3}}$

2 כאן נתקלים בבעיה: אחת הנק': $e^{i\pi}=-1$ נמצאת על מסלול האינטגרציה.

לכן נבנה מסלול שלא כולל את הנקודה הבעייתית.

כיוון שיש לנו 3 נק' סינגולריות בפתח זווית של $\frac{2\pi}{3}$.

באופן כללי, בפתח זווית של $\frac{2\pi}{N}$, כאשר N מס' הנקודות.



3 $\int_{C_2}$: $z=Re^{i\theta}$, $dz=iRe^{i\theta}d\theta$, $\theta:0\longrightarrow\frac{2\pi}{3}$:נאפס את האינטגרל על הקשת

$\Rightarrow\int_{C_2}=\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{iRe^{i\theta}d\theta}{1+(Re^{i\theta})^3}=iR\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{e^{i\theta}d\theta}{1+R^3e^{i3\theta}}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$:לפי הערה 2

4 $\int_{C_3}$: $z=re^{i\frac{2\pi}{3}}$, $dz=e^{i\frac{2\pi}{3}}dr$, $r:R\longrightarrow0$

$\Rightarrow\int_{C_3}=\int_{\infty}^{0}\frac{1}{1+r^3}e^{i\frac{2\pi}{3}}dr=-e^{i\frac{2\pi}{3}}\int_{0}^{\infty}\frac{dr}{1+r^3}=-e^{i\frac{2\pi}{3}}I$

5 $\Rightarrow\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}=(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})I=2\pi i\,Res|_{z=e^{i\frac{\pi}{3}}}$

6 $Res|_{z=e^{i\frac{\pi}{3}}}=\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{3}}}(z-e^{i\frac{\pi}{3}})\frac{1}{1+z^3}=$ [לופיטל] $=\frac{1}{3z^2}\Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{3}}}=\frac{1}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

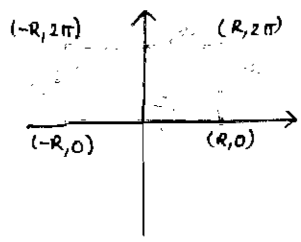
7 $\Rightarrow I=2\pi i\,\frac{1}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}}\left(\frac{1}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}\right)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

- למת ג'ורדן: $\int g(z)e^{i\alpha z}dz$ מתאפס על קשת אינסופית אם $g(z)\longrightarrow0$ ו:

א) $Re(\alpha)>0$ אם הקשת בחצי המישור העליון.

ב) $Re(\alpha)<0$ אם הקשת בחצי המישור התחתון.

*) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}\,dx}{1+e^{x}}$, $0<a<1$ במקרה של אקספוננט במונה נעבוד עם מסלול <u>מלבני</u>



המסלולים C_2, C_4 יתאפסו. המסלול C_1 הוא האינטגרל שאנחנו מחפשים והמסלול C_3 יהיה פרופורציוני לאינטגרל, רק שצריך יהיה לקחת אותו בחשבון.

5) <u>אינטגרל של פונקציה טריגונומטרית</u>:

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$$

הופכים לאינטגרל על מעגל היחידה:

$$z = e^{i\theta}$$

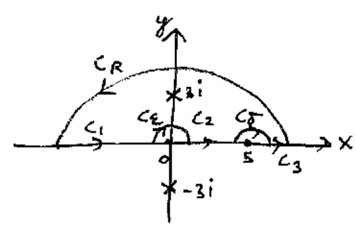
$$dz = ie^{i\theta}d\theta \;\Rightarrow\; d\theta = -\frac{i\,dz}{e^{i\theta}} = -i\frac{dz}{z}$$

$$\sin\theta = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \quad \cos\theta = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

6) <u>הערך העיקרי של קושי</u>

מתאים עבור קטבים <u>פשוטים</u> על מסלול האינטגרציה. אם הקוטב אינו פשוט, אזי הפונקציה מתבדרת ומת העולם. מקיפים את הקטבים הפשוטים בחצאי עיגולים במישור העליון ומחשבים את המסלולים שלהם בנפרד.

$$*)\; I = PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+x^2)\,dx}{x(x-5)(x^2+9)} = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon,\delta\to 0}}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{5-\delta} + \int_{5+\delta}^{R}\right)$$



$$\underline{1}\quad \overbrace{\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}}^{=I}+\int_{C_\varepsilon}+\int_{C_\delta}+\overbrace{\int_{C_R}}^{\to 0} = 2\pi i\,\mathrm{Res}\big|_{z=3i}$$

$$\underline{2}\quad 2\pi i\,\mathrm{Res}\big|_{z=3i} = 2\pi i \lim_{z\to 3i}(z-3i)f(z) = \ldots = \frac{4\pi}{51} - \frac{20\pi i}{153}$$

$$\underline{3}\quad C_\varepsilon:\; z=\varepsilon e^{i\theta},\; dz = i\varepsilon e^{i\theta}d\theta,\; \theta: \pi\to 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{(1+\varepsilon^2 e^{i2\theta})(i\varepsilon e^{i\theta}d\theta)}{\varepsilon e^{i\theta}(\varepsilon e^{i\theta}-5)(\varepsilon^2 e^{i2\theta}+9)} = \int_{\pi}^{0}\frac{i\,d\theta}{(-5)(9)} = \frac{\pi i}{45}$$

$$C_\delta:\; z = 5+\delta e^{i\varphi},\; dz = i\delta e^{i\varphi}d\varphi,\; \varphi: \pi\to 0$$

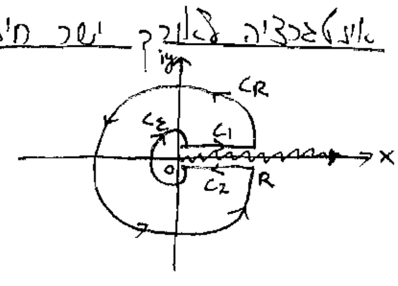
$$\Rightarrow \int_{C_\delta} = \lim_{\delta\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{[1+(5+\delta e^{i\varphi})^2]\, i\delta e^{i\varphi}d\varphi}{(5+\delta e^{i\varphi})(\delta e^{i\varphi})[(5+\delta e^{i\varphi})^2+9]} = \int_{\pi}^{0}\frac{(1+25)\,i\,d\varphi}{(5)(34)} = -\frac{13\pi i}{85}$$

$$\underline{4}\quad \Rightarrow I = \left(\frac{4\pi}{51}-\frac{20\pi i}{153}\right) - \frac{\pi i}{45} + \frac{13\pi i}{85} = \frac{4\pi}{51}$$

כיוון שהאינטגרל ממשי, התוצאות המדומות של המסלולים על הקטבים צריכות בדיוק לאפס את החלק המדומה של חישוב השארית.

<u>אינטגרציה לאורך ישר חיתוך</u>–

בדומה לקטבים הפשוטים, פה מקיפים את ישר החיתוך. C_1 הנו האינטגרל הרצוי. C_R, שכל $0^+\to 2\pi^-$, ו־C_ε, שכל $2\pi^- \to 0^+$, יתאפסו. C_2 יתרום לאינטגרל, ולכן יש לחשב אותו בזהירות:



האינטגרל על c_2 יכול: $\quad z = re^{i2\pi^-}, \; dz = dr\, e^{i2\pi^-}, \; r: \infty \to \varepsilon$

בהצבה לתוך האינטגרל יתקבלו, בדרך-כלל, שני סוגי אקספוננטים:

$$e^{i2\pi^-} \longrightarrow 1 \quad , \quad e^{i\pi^-} \longrightarrow -1$$

ה-(-1) הוא הגורם החשוב- הוא יהפוך את גבולות האינטגרל ובכך יוסיף לאינטגרל שאנו מחשבים.

טורי פורייה וטרנספורם פורייה

I טור פורייה

בדומה לטור טיילור, שהוא טור חזקות, טור פורייה הוא טור של פונקציות מחזוריות.

$$\boxed{f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta) \qquad 0 \le \theta \le 2\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta \qquad\qquad \int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\sin(n\theta)\,d\theta = 0$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(m\theta)\,d\theta \qquad\qquad \int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \pi\delta_{mn}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(m\theta)\,d\theta \qquad\qquad \int_0^{2\pi} \sin(m\theta)\sin(n\theta)\,d\theta = \pi\delta_{mn}$$

הכללה למחזוריות שונה מ-2π

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \qquad 0 \le x \le L}$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\,dx \qquad\qquad a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx \qquad\qquad a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx \qquad\qquad \cos(n\pi) = (-1)^n, \; \sin(n\pi) = 0$$

הצגה מרוכבת.

הטור הכללי:

$$\boxed{f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)} \quad , \quad C_n = \frac{1}{L}\int_0^{L} f(x)e^{-i\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)}dx}$$

הקישור בין הטור

$$\boxed{f(\theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-in\theta} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi}$$

הממשי לבין הטור המרוכב: $C_0 \equiv \frac{a_0}{2}, \quad C_n \equiv \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right), \quad C_{-n} \equiv \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right) = C_n^*$

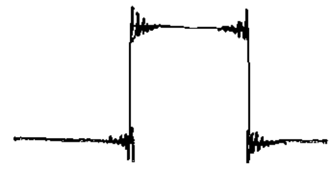
$\cancel{\frac{2}{b-a}\int_a^b}$

II תופעות ומשפטים כלליים

1) משפט פרסבל:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n)^2 + (b_n)^2\right]}$$

2) תופעת גיבס: ליד נק' אי-רציפות רואים שהאמפליטודה גדולה ב-9% מהאמפליטודה הצפויה. האזורים הקרובים לנק' אי-הרציפות לא קטנים כמו בשאר הפונקציה. התופעה קיימת רק בפונקציות שהערך שלהן קופץ בצורה חדה (כמו בגלים מרובעים, אבל לא בגלים משולשים).



3) גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

$$\Rightarrow \boxed{f'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cos(n\theta))' + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\sin(n\theta))' = \sum_{n=1}^{\infty} (-n a_n)\sin(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (n b_n)\cos(n\theta)}$$

הזוגיות של f' הפוכה לזוגיות של f. $\quad a_n' = n b_n \ , \ b_n' = -n a_n$

כל זה נכון בתנאי של- $f'(\theta)$ קיים טור פורייה, כלומר $f'(\theta)$ חסומה ורציפה למקוטעין.

$$\Rightarrow \boxed{\int f(\theta)\,d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n}\right)\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n}\right)\sin(n\theta)}$$

$$\Rightarrow \int a_n\,d\theta = -\frac{b_n}{n} \ , \quad \int b_n\,d\theta = \frac{a_n}{n}$$

זה נכון עד כדי האיבר הקבוע $\frac{a_0}{2}$. אם האיבר הזה לא מתאפס צריך להחסיר אותו מהאינטגרל עצמו, אחרת אי-אפשר לתאר את האינטגרל בפונקציה מחזורית.

4) התכנסות: טור פורייה קיים לפונקציה אם הפונקציה חסומה ורציפה למקוטעין ומספר ~~אפשרויות~~ אי-הרציפויות בתוך הקטע $[0,2\pi]$ הוא סופי.

5) זוגיות של טורי פורייה: $\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$ היא פונקציה אי-זוגית ו- $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$ היא פונקציה זוגית. לכן, עבור פונקציות זוגיות מקדמי הסינוסים יתאפסו: $f(\text{זוגית}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta)$

ועבור פונקציות אי-זוגיות נשאר עם סינוסים: $f(\text{אי-זוגית}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta)$

III טרנספורם פורייה

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx}\,dx \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}\,dk \end{aligned}}$$

1) מעביר אותנו מפונקציה של משתנה אחד (x) לפונקציה של משתנה אחר (k).

ה $\pm$ באקספוננטים שרירותיים, אבל חייבים להיות הפוכים. כך גם הפקטור $\frac{1}{2\pi}$ - הוא צריך להופיע באחד האינטגרלים, אבל לא חשוב באיזה מהם.

2) פונקציית ה-δ של דיראק -

$$\boxed{\delta(x-x') \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}\,dk}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,dx' \,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}\,dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,\delta(x-x')\,dx'$$

פונקציית ה-δ בוחרת עבורנו את ערך הפונקציה בנק' x': $\quad \Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,\delta(x-x')\,dx$

את פונקציית ה-δ ניתן לתאר ע"י סדרות שונות של פונקציות. כדי לבדוק אם פונקציה מסוימת היא אכן פונקציית δ, בודקים שני תנאים:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_N(x) f(x)\,dx \xrightarrow[N\to\infty]{} f(0)$

- תכונות של פונקצית ה-δ:

1) $\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x)$

2) $\delta(-x) = \delta(x)$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta[g(x)]\,dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$ כאשר $\{x_i\}$ קבוצת השורשים של $g(x)$:

4) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta'(x)\,dx = -\frac{df}{dx}\Big|_{x=0}$

- הפונקציה הקדומה של פונקצית δ:

פונקצית Heaviside:

$$\Rightarrow \boxed{\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x)\,dx = \begin{cases} 1 & x>0 \\ (\frac{1}{2}) & x=0 \\ 0 & x<0 \end{cases}}$$

3) משפט פרסבל לטרנס' פורייה:

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk}$$

4) משפט הקונבולוציה

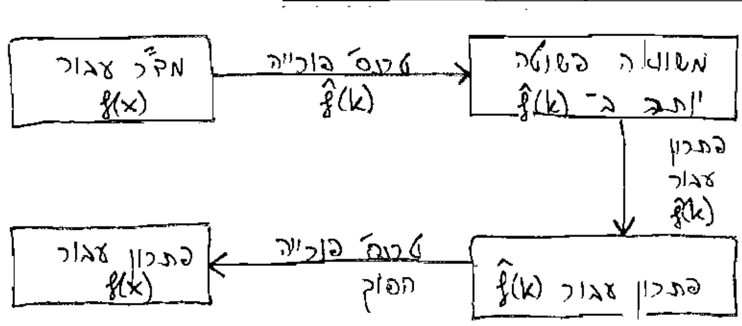
איך נעשה טרנס' פורייה לפונקציה שהיא מכפלת פונקציות?

$$\boxed{h \circledast f \equiv \mathcal{F}(hf) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(k')\,\hat{f}(k-k')\,dk'}$$

5) תכונות שימושיות

$f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$	$\hat{f} = \mathcal{F}(f)$
$f = e^{-x^2/\sigma^2}$	$\hat{f} = \sqrt{\pi\sigma^2}\, e^{-\sigma^2 k^2/4}$
$f(x) = f(-x)$ זוגית וממשית	$\hat{f}(k) = \hat{f}(-k) = \hat{f}^*(k)$ זוגי וממשי
$f(x) = -f(-x)$ אי-זוגית וממשית	$\hat{f}(k) = -\hat{f}(-k) = -(\hat{f})^*$ אי-זוגית ומדומה
$\frac{df}{dx}$ נגזרת	$ik\cdot\hat{f}(k)$
$f^{(n)}(x)$ הנגזרת ה-n-ית	$(ik)^n\hat{f}(k)$
$f^*(x)$ צמוד מרוכב	$[\hat{f}(-k)]^* = \mathcal{F}(f^*)$
$f(x+a)$ הזזה	$e^{ika}\hat{f}(k)$
$f\cdot h$ מכפלה	קונבולוציה: $f \circledast h = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(k')\,\hat{h}(k-k')\,dk'$
אוסילטור מרוסן $f(t) = e^{-t/\tau}\sin(\omega_0 t)$	$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega-\omega_0-i/\tau} - \frac{1}{\omega-\omega_0+i/\tau}\right)$

6) פתרון ~~של~~ מד"ר עם טרנספורם פורייה



7) התמרה לפורייה תלת-מימדי

עבור $\bar{r}=(x,y,z)$ ו- $\bar{k}=(k_x,k_y,k_z)$ במרחב פורייה:

$$\boxed{f(\bar{r})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\iiint\hat{f}(\bar{k})\,e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}}\,d\bar{k}}$$

מד"ר ליניאריות מסדר שני

I שיטות מורכבות

לסיכום השיטות שלמדו בעבר ניתן לפנות לסיכום הקורס ממד"ר 1.

בחלק זה נתמקד על שיטה אחת, עבור המד"ר הבאה: $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$.

השיטה הבאה תלויה בכך שאחד מפתרונות המשוואה ההומוגנית, $y_1(x)$, נתון מראש.

1) $y_1(x)$ נתון, עבור המשוואה ההומוגנית.

2) $y_2(x)=g(x)y_1(x)$. מציבים את המשוואה:

$$\boxed{y_2=gy_1}$$

$$\Rightarrow\ y_2'=g'y_1+gy_1'$$

$$y_2''=g''y_1+gy_1''+2g'y_1'$$

3) מציבים חזרה לתוך המד"ר ונשארים עם מד"ר מסדר ראשון, ומקבלים:

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int^{t}p(s)ds}}{[y_1(t)]^2}\,dt$$

4) מציבים את הפתרונות y_1,y_2 למשוואה:

$$\boxed{y_p=c_1y_1+c_2y_2}$$

ופותרים את המשוואה, כך שיש לנו ביטוי שכולל את c_1',c_2'.

5) משתמשים בתנאי הבא:

$$\boxed{c_1'y_1+c_2'y_2=0}$$

מקבלים שתי משוואות עבור c_1',c_2', פותרים את האינטגרלים ומציבים חזרה ל-y_p.

II סיווג נקודות סינגולריות

עבור המשוואה ההומוגנית $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ נגדיר:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}|Q(x)|\xrightarrow[x\to x_0]{}\infty\\ \quad\text{או}\\ |P(x)|\xrightarrow[x\to x_0]{}\infty\end{array}\right\}\ x_0\ \text{נקודה סינגולרית}}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}|(x-x_0)P(x)|\xrightarrow[x\to x_0]{}|c|<\infty\\ \quad\text{וגם}\\ |(x-x_0)^2Q(x)|\xrightarrow[x\to x_0]{}|\tilde{c}|<\infty\end{array}\right\}\ x_0\ \text{נקודה סינגולרית רגולרית}}$$

בדיקת סינגולריות באינסוף: $x\to\infty$:

$$\boxed{z=\frac{1}{x}\ ,\ z\to0}$$

מגדירים משתנה חדש, $z=\frac{1}{x}$, ובודקים מה קורה כאשר $z\to0$. בודקים את התנאים מלמעלה, באותו אופן.

III שיטת פרובניוס

1) משתמשים בפתרון מסוג $y=\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{\lambda+k}$

2) גוזרים כדי לקבל ביטויים עבור y', y'' ומציבים אותם חזרה לתוך המד"ר המקורית.

3) עבור סכומים שכוללים איברים גבוהים מ- $x^{\lambda+k}$ (היינו $x^{\lambda+k-2}$ או $x^{\lambda+k-1}$)
מפרקים את הסכום:

$$y''=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+k)(\lambda+k-1)a_\lambda x^{\lambda+k-2}=a_0k(k-1)x^{k-2}+a_1(k+1)kx^{k-1}+\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda+k+2)(\lambda+k+1)a_{\lambda+2}x^{\lambda+k}$$

4) את המקדמים של $x^{\lambda+k}$ מכנסים כך שיש ביטוי שנראה כמו:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}\{a_{\lambda+2}(\lambda+k+2)(\lambda+k+1)-a_\lambda[2(\lambda+k)-2\alpha]\}x^{\lambda+k}$$

כך שאפשר יהיה למצוא תלות בין $a_{\lambda+2}$ לבין a_λ.

5) מאפסים את האיברים הנמוכים (עם ה- a_0,a_1) כך:
$k=0 \Rightarrow \overset{\text{בוחרים}}{a_1=0}$. או $k=1 \Rightarrow \overset{\text{מקבלים}}{a_1=0}$

6) תיאור השיטה מעורפל - ההסבר הכי טוב מופיע בפתרון של שאלה 9 בתרגיל 11.

IV אופרטורים צמודים

כדי ~~למצוא~~ את האופרטור הצמוד לאופרטור $\mathcal{L}$ בודקים: $\int_{x_1}^{x_2} v^*\mathcal{L}u\,dx=\left[\int_{x_1}^{x_2}u^*\mathcal{L}^{\dagger}v\,dx\right]^*+$ (איברי שפה).
מתחילים עם האינטגרל $\int_{x_1}^{x_2} v^*\mathcal{L}u\,dx$ ועושים אינטגרציה בחלקים עד שמגיעים לאינטגרל $\int u^*\mathcal{L}^{\dagger}v\,dx$, ואז מחלצים את $\mathcal{L}^{\dagger}$. בד"כ נעבוד עם פונקציות ממשיות ואפשר יהיה להתעלם מהצמודים.

<u>הרמיטיות</u>: האופרטור $\mathcal{L}$ <u>יקרא הרמיטי אם $\mathcal{L}=\mathcal{L}^{\dagger}$ ובנוסף איברי השפה מתאפסים</u>:

א) $\left\{\begin{array}{l} u(a)=u(b)=0 \\ v(a)=v(b)=0 \end{array}\right.$ וגם לצמודים שלהם.

ב) הנגזרות מתאפסות: $\frac{du}{dx}\Big|_a=\frac{du}{dx}\Big|_b=0$ וכן ל- v ולצמודים.

ג) לעתים (רחוקות): $p(a)=p(b)=0$, כאשר p לקוח מהמד"ר $y''+py'+qy=0$.

V צורת שטורם-ליוביל:

$$\mathcal{L}=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right]+q(x)+\lambda\omega(x)$$

כאשר $\omega(x)$ היא פונקציית משקל כלשהי ו-λ הערכים העצמיים של המשוואה.
האופרטור בצורת ש"ל הוא הרמיטי ועל-כן מקיים את התכונות ההרמיטיות:

א) $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ערכים-עצמיים ממשיים.

ב) <u>אורתוגונליות</u>: הפונקציות העצמיות מקיימות $\forall(n\neq l):\int_{-\infty}^{\infty}u_n(x)u_l(x)\omega(x)\,dx=0$.

ג) <u>שלמות</u>: כל פונקציה f ניתנת להצגה כסכום של הפונקציות העצמיות: $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_n u_n(x)$.

1) <u>מעבר לצורת שטורם-ליוביל</u>

אם מקבלים מד"ר מהצורה: $u''+\hat{P}(x)u'+\hat{Q}(x)u=0$ ניתן להעביר אותה לצורת ש"ל כך:

$$p(x)=e^{\int \hat{P}(x)dx}\quad,\quad q(x)=p(x)\hat{Q}(x)$$

ואם המד"ר מהצורה: $p_0(x)u''+p_1(x)u'+\lambda u=0$ ניתן למצוא פונקצית משקל:

$$\omega(x)=\frac{1}{p_0(x)}e^{\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}dt}$$

ואז לכפול את המד"ר ב- $\omega(x)$.

2) <u>שיטת גרהם-שמידט</u> - עמ' 597 בארפקן

כיוון שכל פונקציה אפשר לפתח בטור של פונקציות עצמיות (במקרה ודובר בצורת ש"ל), אז פתרון בשיטת פרובניוס יניב בדיוק טור כזה. אבל, כדי שהאופרטור יהיה הרמיטי הטור צריך להיות להיקטע. אפשר לחשב את הפולינומים האלה בשיטת גרהם-שמידט.

מתחילים עם סט של פולינומים בת"ל לינארית $\{u_i(x)\}$, שמשמשים בסיס של פולינומים בת"ל ואורתוגונליים $\{\psi_i\}$ ומגיעים לסט אורתונורמלי $\{\varphi_i\}$.

אם הנרמול הוא ל-1, אזי:

$$\varphi_i=\frac{\psi_i}{\sqrt{\int\psi_i^2\omega dx}}$$

$$\psi_i=u_i+a_{i0}\varphi_0+a_{i1}\varphi_1+\dots+a_{i\,i-1}\varphi_{i-1}$$

$$a_{ij}=-\int u_i\varphi_j\omega dx$$

ואם הנרמול הוא לפי קבוע כלשהו N_i:

$$\varphi_i=N_i\frac{\psi_i}{\sqrt{\int\psi_i^2\omega dx}}$$

$$a_{ij}=-\frac{1}{N_j^2}\int u_i\varphi_j\omega dx$$

<u>משוואות דיפרנציאליות חלקיות</u>

$\boxed{\text{I}}$ <u>שיטת הפרדת המשתנים</u>

ממירים מד"ח אחת למספר מד"רים. השיטה היא לקחת את המד"ח ולפרק אותה לשני אגפים, כאשר כל אגף תלוי רק במשתנה אחד (או, ליתר דיוק, אחד האגפים תלוי במשתנה אחד בלבד והאגף השני, שתלוי במשתנים אחרים, לא תלוי באותו משתנה). במקרה כזה שני האגפים צריכים להשתוות לקבוע. כך, למשל:

$$*)\quad K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial T}{\partial t}$$

מנחשים פתרון מופרד משתנים:

1 $\boxed{T(x,t)=\tau(t)X(x)}$

מציבים את הפתרון לתוך המד"ח:

2 $\Rightarrow K\tau X''=\tau' X$

מפרידים אגפים ומשווים לקבוע:

3 $\Rightarrow K\frac{X''}{X}=\frac{\tau'}{\tau}=\lambda\ \{const\}$.

4 $\Rightarrow \tau'=K\lambda\tau \Rightarrow \tau(t)=e^{K\lambda t}$

$$X''=\lambda X \Rightarrow X(t)=\begin{cases}A\sin(\sqrt{\lambda}x)+B\cos(\sqrt{\lambda}x)\\ ax+b\\ \alpha\sinh(\sqrt{\lambda}x)+\beta\cosh(\sqrt{\lambda}x)\end{cases}$$

לפי תנאי הבעיה (תנאים פיזיקליים, תנאי שפה או תנאי התחלה) בוחרים את הפתרונות הנכונים. 5

כתרון כללי יהיה סכום של כל הפתרונות העצמיים: $T(x,t)=\sum A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$ 6

לבסוף מציבים את תנאי ההתחלה הנותרים כדי למצוא את הקבועים שנותרו. 7

$\boxed{\text{II}}$ פולינומי לג'נדר

מופיעים בהרבה מאוד מקומות בפיזיקה, בין היתר כחלק מהפתרון למשוואת לפלס או למשוואת הלמהולץ, מופרדת גם ל-θ וגם ל- $x=\cos\theta$:

$$\boxed{\begin{aligned} \theta: &\quad \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin\theta}\Theta(\theta) = -\lambda \sin\theta\, \Theta(\theta) \\ x: &\quad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right] - \frac{m^2}{1-x^2}\Theta = -\lambda\Theta = -\ell(\ell+1)\Theta \end{aligned}}$$

נהוג להגדיר את λ: $\lambda=\ell(\ell+1)$. עבור $\cos\theta=x$ עובדים בתחום $-1\le x\le 1$ ונקודות הקצה הן נקודות סינגולריות רגולריות. לכל m יש משפחה של פתרונות $\{\Theta_{\lambda m}(x)\}$, כאשר לכל λ יהיה ~~[illegible]~~ פולינום $\Theta_{\lambda,m}$ שונה. עבור כל m מסוים הסט $\{\Theta_{\lambda m}\}$ מהווה בסיס אורתוגונלי.

- <u>משוואת לג'נדר הפשוטה</u>

מתאימה לבעיות עם סימטריה אזימוטלית (סביב ציר $\hat{z}$), בהן אין תלות ב-φ.

במקרה כזה דורשים $m=0$ (הסבר מלא בעמוד <u>62</u> של המחברת) ומקבלים:

משוואת לג'נדר הפשוטה: $\boxed{\left[\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} + \ell(\ell+1)\right] P_\ell(x) = 0}$

המשוואה בצורת ש"ל, ולכן תכונות ההרמיטיות תקפות עבורה:

1) $\lambda=\ell(\ell+1)$ <u>ממשיים</u>.

2) <u>אורתוגונליות</u>: $\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_{\ell'}(x)\omega(x)dx=0$ לכל $\ell\neq\ell'$, כאשר $\omega(x)=1$.

3) <u>שלמות</u>: כל פונקציה $f(x)$ אשר מוגדרת בתחום $-1\le x\le 1$ כ: $f(x)=\sum_\ell a_\ell P_\ell(x)$.

- <u>פתרונים של משוואת לג'נדר</u>

$$P_\ell(x) = \sum_{n=0}^{[\ell/2]} (-1)^n \frac{(2\ell-2n)!}{2^\ell n!(\ell-n)!(\ell-2n)!} x^{\ell-2n} \quad , [\ell/2] = \begin{cases} \ell/2 & \ell \text{ זוגי} \\ \frac{\ell-1}{2} & \ell \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

<u>זוגיות</u>: מהפתרון רואים שמתקיים $P_{2\ell}(x)=P_{2\ell}(-x)$ ונשארים רק האיברים הזוגיים, וכן: $P_{2\ell+1}(x)=-P_{2\ell+1}(-x)$ ונשארים רק האיברים האי-זוגיים. לכן: $\boxed{\forall(\ell\in\mathbb{N}): P_\ell(x)=(-1)^\ell P_\ell(-x)}$.

- <u>נוסחת רודריגז</u>

דרך נוספת לחשב את פולינומי לג'נדר: $P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell (x^2-1)^\ell$

- <u>נקודות מיוחדות</u>

$x=1: \quad P_\ell(1)=1$

$x=-1: \quad P_\ell(-1)=(-1)^\ell P_\ell(1)=(-1)^\ell$

$x=0: \quad P_{2\ell+1}(0)=-P_{2\ell+1}(0)=0 \quad ; \quad P_{2\ell}(0)=\frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell}}\frac{(2\ell)!}{\ell!\ell!}$

פיתוח בבסיס של פולינומי לג'נדר

כל פונקציה בתחום $-1 \leq x \leq 1$ ניתן לפתח בטור של פולינומי לג'נדר, עם פקטור נרמול:

$$\boxed{f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x) \quad ; \quad a_l = \frac{1}{N_l}\int_{-1}^{1} f(x) P_l(x)\,dx \quad ; \quad N_l = \frac{2}{2l+1}}$$

V נספחים

I אינטגרלי פורייה

$$\boxed{I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}|_{z_k}}$$

באם $a>0$ ← חצי מ.ע. עליון

ומתקיימת למת ז'ורדן: $\int_{C_R} f(z) e^{iza}\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. אם $a<0$ ← חצי מ.ע. תחתון: $-2\pi i$

II פולינומי לג'נדר הראשונים

$P_0(x) = 1$ $\quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$ $\quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

$P_1(x) = x$ $\quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

פתרון מד"ים בעזרת טרנספורם פורייה

את הנגזרות של $f(x)$ מחליפים כך:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = (ik)^n \hat{f}(k)$$

אם קיימים איברי x, מחליפים אותם כך:

$$x^n = (i)^n \frac{d^n}{dk^n}$$

קונבולוציה

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\hat{g}(k) e^{-ikx}\,dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(u-x)\,dx$$

הקונבולוציה מוגדרת כך:

$$f \circledast g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(u-x)\,dx$$

הטרנספורם של הקונבולוציה הוא כפל הטרנספורמים:

$$\mathcal{F}(f \circledast g) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$$

ניתן גם לעשות קונבולוציה לטרנספורמים:

$$\hat{f} \circledast \hat{g} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\hat{g}(y-k)\,dk$$

וכך לקבל טרנספורם של מכפלת פונקציות.

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \circledast \hat{g}) = f \cdot g \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(f \cdot g) = \hat{f} \circledast \hat{g}$$

חייבים לשים לב להתנהגות הפונקציות בגבולות שלהן. אם הן משתנות במהלך התחום (צריך לשים לב איך טרנספורמים מתנהגים עבור $k>0$ או $k<0$) אז הגבולות שחקו תפקיד מאוד חשוב. כאלה שתי הנוסחאות בעמודים המצורפים.

פתרונות ספצי"ם של משוואות לפלס

- קואורדינטות גליליות, אין תלות ב-z:

$$\boxed{\Phi(\rho,\varphi) = (A_0 + B_0\ln\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin(n\varphi) + B_n\cos(n\varphi))(A_n\rho^n + B_n\rho^{-n})}$$

אם מחפשים בתוך הגליל: ρ^{-n}, $\ln\rho$ נופלים.

אם מחפשים מחוץ לגליל: ρ^n נופל.

- קואורדינטות כדוריות, אין תלות ב-φ (סימטריה אזימוטלית):

$$\boxed{\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right)}$$

כאשר $P_l(\cos\theta)$ פולינומי לג'נדר.