שיטות נומריות - סיכום

I אינטרפולציה

1) שיטת לגרנז' - השיטה הבסיסית ביותר - מקרבת פולינום בעזרת הנקודות. הפולינום עובר דרך כל הנקודות והוא מהסדר הרצוי.

בעיות: א) לא נוח לתכנות.

ב) לא נותן הערכת שגיאה.

ג) הרבה נקודות - פולינום מסדר גבוה שגורם לתנודות (ולא קשה לבחור

בהערכה את הנקודה הבאה) עדיף להתאים בצורה הרצויה, עם מעט נקודות.

2) שיטת Neville - מחשב את הנקודות הבאות לפי הנקודות הקודמות:

$$P_{i(i+1)(i+2)\cdots(i+m)} = \lambda(x)\, P_{i(i+1)\cdots(i+m-1)} + [1-\lambda(x)]\, P_{(i+1)(i+2)\cdots(i+m)}$$

$$\lambda(x) = \frac{x - x_{i+m}}{x_i - x_{i+m}}$$

לפי המספר שבסוגריים משמיטים את $(i+j)$, $(i+m-1)$.

תהליך: הבדלים בין סדרות עוקבים. לפי ה- P_i נעזר את ההבדלים בעזרת:

$$C_{m,i} = P_{i(i+1)\cdots(i+m)} - P_{i(i+1)\cdots(i+m-1)} \qquad D_{m+1,i} = \frac{(x_{i+m+1} - x)(C_{m,i+1} - D_{m,i})}{x_i - x_{i+m+1}}$$

$$D_{m,i} = P_{i(i+1)\cdots(i+m)} - P_{(i+1)\cdots(i+m)} \qquad C_{m+1,i} = \frac{(x_i - x)(C_{m,i+1} - D_{m,i})}{x_i - x_{i+m+1}}$$

הפונקציה הסופית נוצרת מאיתור ב-Y בהתחלה ומסלול עליון מסלול של C, או של D,

שיוצרת מסלול עם הערכה בהמשך המסלול. C,D מהווים הערכה גסה לשגיאה.

3) אינטרפולציה לינארית - מחברים כל שתי נקודות בקו: $\boxed{P_{12}(x) = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \ , \ \lambda = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}}$

4) פולינום רציונלי - כל מספר נקודות מחברים בפולינומים רציונליים שמתאימים בין

הפולינומים - זה נותן פונקציה חלקה יותר.

במקרים של התבדרות מהירה של הפונקציה - שימוש בפונקציה רציונלית: $y \approx R_{i(i+1)\cdots(i+m)} = \frac{P_\mu(x)}{Q_\nu(x)}$

זה שוקל את הסינגולריות של פונקציות מקורבות בצורה.

5) Cubic Spline - מחלקים את הפונקציה לחלקים ולכל קטע מתאימים פולינום מסדר 3.

כך, שבין חלקות יש פחות "קפיצות" מאשר בנקודות אמיתיות. כך שמתקיימת אינטרפולציה

לינארית של "הנגזרת השנייה". קובעים את ערכי הנגזרת השנייה רק עבור הנקודות הראשונה והאחרונה

+ אם שני תנאי שפה: $y_1''=0$ או y_1' נתון; $y_N''=0$ או y_N' נתון.

(6 - III) אינטגרציה נומרית - משוואות

6) אנשים שימשו בקורס בשיטות אינטגרציה שלא נחתכו בנפרד.

א) בעיות מסוגים פונקציות חלקות — מתאים קטן.

ב) בעיות קשות, פונקציות קשות - מבצעים את האינטגרל לחלקים מספר פעמים.

ג) בעיות מסוגים — כוללים.

II גזירות נומריות

1) $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$: $h \sim \sqrt{\varepsilon_f}\, x$, $\frac{(e_r+e_t)}{f'} \sim \sqrt{\varepsilon_f}$

שגיאת קיצוץ, שגיאה יחסית, שגיאת עיגול, השגיאה היחסית בחישוב f

2) $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$: $h \sim (\varepsilon_f)^{\frac{1}{3}} x$, $\frac{(e_r+e_t)}{f'} \sim (\varepsilon_f)^{\frac{2}{3}}$

דיוק המכונה

בד"כ $\varepsilon_f \approx \varepsilon_m$, אבל לא תמיד.

```
temp = x+h;
something(temp);
h = temp - x;
```

III אינטגרציה נומרית

1) שיטת הטרפז: $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = h[\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2]$ והשגיאה היא מסדר גודל של $h^3 f''$. נוסחאות מורחבות

מכלילות שיטה זו על N+1 קטעים: $\int_a^b f(x)dx = h[\frac{1}{2}f_1 + f_2 + \dots + \frac{1}{2}f_N] + O[\frac{(b-a)^3}{N^2} f'']$

יש הרבה סוגים של טרפזים. למעלה נוסחה סגורה. יש גם נוסחה פתוחה שמונעת את מצב הקצה

$\int_{x_1}^{x_N} f(x)dx = h[f_{3/2} + f_{5/2} + \dots + f_{N-1/2}] + O(\frac{1}{N^2})$ {ה-h אין לו השפעה על השגיאה, אלא רק מקדם}

2) שיטת סימפסון - נותנת משקלים שונים לנקודות באמצע, עוברת על סט של 3 נקודות - בכל 3 נקודות עוברת פרבולה. נכונה עד לפולינום מסדר 3.

$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = h[\frac{1}{3}f_1 + \frac{4}{3}f_2 + \frac{1}{3}f_3] + O[h^5 f^{(4)}]$

$\int_{x_1}^{x_N} f(x)dx = h[\frac{1}{3}f_1 + \frac{4}{3}f_2 + \frac{2}{3}f_3 + \frac{4}{3}f_4 + \dots + \frac{4}{3}f_{N-1} + \frac{1}{3}f_N] + O[\frac{1}{N^4}]$ עבור N אי-זוגי

3) טרפז רקורסיבי - בכל איטרציה מקטינים את h פי 2 ומשתמשים בכל הנקודות הקודמות שכבר חושבו. הסיום בכל צעד (הפרש delta בין ערכי האינטגרל המתקבלים) תלוי בהערכת השגיאה. משיגים את הרקורסיה עם שינויים מתחת לדיוק הרצוי. התכנסות של $\frac{1}{N^2}$.

4) רומברג: מתאימה לאינטגרציה של פונקציה חלקה (אנליטית) ללא נק' סינגולריות ובעלי בקצוות. הכללה של סימפסון. הערכה של שיטת הטרפז עבור ערכים קטנים של h ($h_0, h_0/2, h_0/4, \dots$) ורק מסיקה את ערכי השגיאה (לפי נוסחת הסכימה של אוילר-מקלורין). מתכנסת מהר יותר מסימפסון.

עושים k איטרציות ומשלבים עם איבר השגיאה מסדר $O[\frac{1}{N^{2k}}]$.

$k=2$ - שיטת סימפסון. $k=5$ - שימוש רגיל עבור פונקציה רציפה.

5) אינטגרלים גרועים - אם יודעים איפה הסינגולריות אפשר לעשות אינטגרל מסביב.

לפעמים אפשר להחליף משתנים $x \to \frac{1}{t}$ כדי להיפטר מאינסוף.

שיטת גאוס - משתמשים במרווחים בגדלים משתנים. עבור האינטגרל $\int_a^b H(x)dx$:

א) מייצגים את $H(x)$ כ: $H(x) = W(x) f(x)$, כאשר בוחרים את $W(x)$ כך ש-$f(x)$ חלקה.

ב) משתמשים בקירוב $\int_a^b W(x) f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{M} w_j f(x_j)$ כאשר: $f(x)$ הוא קומבינציה לינארית של פולינומים אורתוגונליים, x_j הם האפסים של הפולינום $P_M(x)$ ו-w_j הוא המשקל שתלוי בפונקציות: $P'_{M-1}(x_j)$, $P_{M-1}(x_j)$, $\int_a^b P_{M-1}^2(x)dx$.

ג) שלושה סוגי פולינומים:

גאוס-לג'נדר: $(a,b) =$ הכל : $W(x) = 1$

גאוס-לגר: $(a,b) = (0,\infty)$: $W(x) = x^{\alpha} e^{-x}$

גאוס-הרמיט: $(a,b) = (-\infty,\infty)$: $W(x) = e^{-x^2}$

IV מערכות משוואות לינאריות

1) פתרון באמצעות שיטת גאוס-ג'ורדן

$\bar{A}\cdot\bar{x}=\bar{B}$ ⇐ $\bar{x}=\bar{A}^{-1}\cdot\bar{B}$. עושים GJ למטריצה A ומשנים את מטריצת הפתרונות B בהתאם. כש-A הופכת למטריצת היחידה I, B' הם הפתרונות של $\bar{x}$. כשעושים GJ צריך לשים לב לא לחלק במספרים קטנים מדי, כיוון שזה דופק את הדיוק של המחשב.
לכן עושים pivoting - לפני שמחלקים, מחפשים את האיבר הכי גדול מבין האיברים בשורות ובטורים מתחתיו. עושים החלפות של שורות וטורים כדי להביא אותו לאלכסון. אבל: אם מחליפים טורים, אז בסוף צריך להחליף את השורות בתוצאות, בסדר הפוך. אם, למשל, החלפנו את x_1 ב-x_2, ואז את x_2 ב-x_3, אז בסוף מחליפים בתוצאות את שורות 2 ו-3, ואז את שורות 1 ו-2.

2) פירוק LU

מפרקים את המטריצה $\bar{A}$: $A=L\cdot U$, כאשר האלכסון ב-L הוא אחדות ואז:

$$A\cdot\bar{x}=B \Rightarrow L\cdot\bar{z}=B \Rightarrow U\cdot\bar{x}=z$$

קודם מוצאים וקטור z, ואז בעזרתו מוצאים את $\bar{x}$. זה לוקח לנו $\frac{4n^3}{3}$ צעדים, במקום $\frac{n^4}{3}+\frac{n^3}{2}$ צעדים בשיטת GJ.
אפשר להשתמש ב-LU כדי להפוך את $\bar{A}$: פותרים כל פעם עבור טור אחר ב-$\bar{B}$. מתחילים עם $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ומוצאים את $\bar{z}_1$ ו-$\bar{x}_1$ המתאימים, ואז עוברים ל-$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ וממשיכים הלאה.

3) פירוק SVD

במקרה של M משוואות ו-N נעלמים, כאשר $M\geq N$, מפרקים את A לשלוש מטריצות:

$$\underset{(M\times N)}{A} = \underset{(M\times N)}{U}\cdot \underset{(N\times N)}{W}\cdot \underset{(N\times N)}{V^T}$$

W היא מטריצה אלכסונית, כאשר $w_j\geq 0$
המטריצות האחרות מקיימות: $U^T\cdot U=V^T\cdot V=I_N$
כאשר ברור ש-$V^T=V^{-1}$, V היא מטריצה אורתוגונלית.
מניחים ש-$M=N$ ושגם U אורתוגונלית, ואז: $A=U\cdot W\cdot V^T \Rightarrow A^{-1}=V\cdot W^{-1}\cdot U^T$
$W^{-1}=diag(\frac{1}{w_j})$. פה מתחיל הקטע האמיתי: כש-A סינגולרית ($det(A)=0$) לפחות אחד ה-w_j יתאפס. גם אם אחד מהם יהיה מאוד קטן תהיה בעיה - המשוואות יהיו כמעט סינגולריות ונקבל מספר עצום. לכן לכל w_i קטן שמים 0 במקום $\frac{1}{w_i}$.
בסוף מוצאים את הפתרון ל-x, כאשר: $X=A^{-1}\cdot B = V[diag(\frac{1}{w_i})](U^T\cdot B)$
בגלל האפסים ב-W^{-1} הפתרון שנקבל הוא בעצם הפתרון בעל האורך המינימלי: $|x|^2=\sum_{i=1}^{N} x_i^2$
אם, למשל, בודקים קו ישר, אז מקבלים את ה-x הקרוב ביותר לראשית - האורך מהראשית לקו הישר

אם אין אף פתרון ל- $A\cdot x=B$, אז x הוא הקרוב, שמקטין השגיאה הכי מינימלית

כאשר $r=|A\cdot x - B|$. זה נכון גם עבור המקרה M>N.

V מציאת אפסים

1) שיטת החציה - חוצים את האינטרוול לשניים ~~ומוקדם~~ ומחשבים את ערך הפונקציה בנק' החצי. בודקים את סימן הפונקציה בנק' החצי ובקצוות - בוחרים את המקטע שבו הסימנים הפוכים. חוצים שוב, ממשיכים עד שרוחב המקטע מגיע לדיוק הרצוי.

- תמצא רק אפס אחד.
- לא מבדילה בין אפס לבין סינגולריות.
- לא יעילה במיוחד (התכנסות לינארית עם $n=\log_2 \frac{\ell_0}{\varepsilon}$ צעדים, כש- ε הדיוק הסופי). אבל עובדת תמיד.

$\boxed{\text{הדיוק קטן פי 2 בכל צעד}}$

2) שיטת המיתר - מעבירים קו ישר בין קצוות המקטע ולוקחים את הנקודה שבה הוא חותך את ציר ה-x כנק' החדשה. מעבירים קו ישר בין הנק' החדשה לבין אחד הקצוות וממשיכים הלאה. בלהבדל משתמשים תמיד באותה נק' קצה.

$\varepsilon_{n+1} = (\text{const})\,\varepsilon_n^{1.618}$

3) שיטת המיקום השגוי - דומה לשיטה הקודמת, אבל לוקחים את נק' הקצה שסימן הפונקציה בה הפוך לסימן בנק' החדשה (כמו בשיטת החציה). התכנסות איטית יותר.

4) שיטה של ברנט - מתאימים פ"ל לפונקציה ההפוכה העוברת דרך שלוש נקודות ומוצאים את הפונקציה ההפוכה (כלומר $x=f(y)$):

$$x=\frac{[y-f(a)][y-f(b)]c}{[f(c)-f(a)][f(c)-f(b)]}+\frac{[y-f(b)][y-f(c)]a}{[f(a)-f(b)][f(a)-f(c)]}+\frac{[y-f(c)][y-f(a)]b}{[f(b)-f(c)][f(b)-f(a)]}$$

ולוקחים $y=0$ שנותן את ההערכה הבאה לשורש.

במקרה שהפונקציה מתנהגת לא טוב, ברנט משתמש בשיטת החציה.

5) שיטת ניוטון-רפסון - קירוב חישוב של הפונקציה ושל הנגזרת שלה.

לפי טיילור: $f(x+\delta)\approx f(x)+\delta f'(x)$

מניחים שבנקודה הבאה יהיה אפס: $f(x+\delta)=0$ ומכאן $\boxed{\delta=-\frac{f(x)}{f'(x)}}$ אומרים

לנק' הבאה: $x+\delta$ וממשיכים באותו האופן.

בעיה: התבדרות אפשרית אם נופלים על נק' בה $f'(x)=0$ וכו' בנק' רחוקה מהשורש.

ההתכנסות ריבועית: $\varepsilon_{i+1}=x_{i+1}-x_i\approx\varepsilon_i^2\frac{f''(x)}{2f'(x)}$

$\varepsilon_{i+1}=\varepsilon_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

ליד השורש (במרחק) ... הדיוק.

$\boxed{\text{הדיוק עולה בריבוע כל צעד}}$

אם הניחוש ההתחלתי קרוב לאפס - התכנסות מקומית.

אם משלבים עם שיטת החציה - אמינה, כללית.

VI נקודות מינימום/מקסימום

1) חיתוך הזהב - א) מתחילים משתי נקודות קצה ומוצאים נק' שלישית לפי חיתוך הזהב:

$ind3 = ind1 + 0.38197 * (ind1 - ind2)$

ב) בודקים איזה מקטע גדול יותר: 2-3 או 1-3.

ג) מוצאים את הנק' החדשה 0.38197 לתוך המקטע הגדול יותר.

ד) 3 הנקודות החדשות: 3 הנקודות, 3 הנק' החדשה ונק' הקצה שנשארה.

- עוצרים - כמו כן תלוי לפי ההפרש בין ערכי ה-X של הנק' החדשות.

- התכנסות לינארית: $\varepsilon = \varepsilon_0 (0.61803)^n$, $\varepsilon_{n+1} = 0.61803\, \varepsilon_n$

אם ברסה: בודקים את הנגזרת בנק' החדשה. אם שלילית לוקחים את הקצה עם הנגזרת ... , ... ~~...~~ מוצאת לתוך ...

2) שיטת ברנט: א) מתחילים משלוש נקודות.

ב) מעבירים דרכן פרבולה לפי נוסחת לגרנג'.

ג) המינימום של הפרבולה הוא הניחוש של המינימום של הפונקציה והנק' החדשה.

ד) ממשיכים ~~עם שלוש נקודות~~ קצה. הנק' החדשה הופכת לנק' קצה.

3) שיטת סימפלקס: סימפלקס הוא צורה ~~גאומטרית~~ שמורכבת, במרחב N-מימדי, מ-N+1 נקודות וכל המיתרים והפאות שמחברים ביניהם (בדו-מימד, למשל, זה משולש).

שיטת סימפלקס מתחילה מ-N+1 נק' שרירותיות עבור פונקציה עם N משתנים. תחילה בודקים את ערך הפונקציה בכל הנקודות ואז השיטה מנסה להתרחק מהנק' הגבוהות ולהתקרב לנק' הנמוכות בכך שהיא מרחיבה ומכווצת את הסימפלקס (כמו תנועה של אמבה). כשמגיעים למינימום חשוב כדי להתחיל את השיטה כי יתכן שהיא בטעות התקרבה (או הגיעה למינ' מקומי). לוקחים את המינ' התשובה בתור אחת מנק' ההתחלה ומריצים שוב. אם השיטה מגיעה שוב לאותה הנק' - כנראה שהיא אכן מינימום.

א) מעבירים לנק' זה ערך הפונקציה הכי גדול שיקוף סביב מרכז המסה את הנק' האחרות.

ב) I אם הנק' החדשה f נמוך מהנק' הנמוכה הקודמת, מרחיקים את הנק' החדשה מהמרכז פי 2.

II אם " " " גבוה " " " , אבל נמוך מהערך הגבוה, נשארים במקום.

III אם " " " גבוה מהערך הגבוה ביותר - מחליפים את השיקוף הזה ומקרבים את הנק' הגבוהה לחצי המרחק המקורי. אם הוא עדיין הכי גבוה מקטינים את המרחקים של כל הנקודות יחסית לשולש המקורי.

ג) חוזרים להתחלה.

* השיטה יכולה להתכנס, בתלות בבחירת נקודות ההתחלה.

4) שיטת Conjugate Gradient - במקרה ודגור פונקציה בת-משתנים, לפעמים ... את
ערך הפונקציה $f(P)$ וגם את הנגזרת של $f(P)$: $\nabla f(P)$

א) מתחילים בנק' P_0 ובוחרים וקטור=שיפוע $\bar{h}_0 = \bar{g}_0$

ב) עושים מינימיזציה חד-מימדית בכיוון $\bar{h}_i$ כדי שנגיע למינימום מקומי.

ג) מחשבים את הגרדיאנט בנקודה החדשה P_{i+1}: $g_{i+1} = -\nabla f(P_{i+1})$

ד) מחשבים וקטור כיוון חדש: $h_{i+1} = g_{i+1} + \gamma_i h_i$

ה) את γ_i מחשבים לפי: $\gamma_i = \frac{(g_{i+1}-g_i)\cdot g_{i+1}}{g_i \cdot g_i}$ פולק-ריביר, $\gamma_i = \frac{g_{i+1}\cdot g_{i+1}}{g_i \cdot g_i}$ פלצ'ר-ריבס

- ממשיכים עד שמגיעים למינימום האמיתי (תוך קצב מהיר).

וקטורים צמודים: כל כיוון חדש צמוד $u\cdot A\cdot v=0$ - כיוון חדש, שומר מידע על הכיוון הקודם.

VII מד"ים

1) שיטת אוילר - מתחילים מתנאי התחלה x_1, y_1, $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$.

א) בוחרים גודל צעד h בציר ה-X.

ב) לפי אוילר: $y(x_2) = y(x_1) + h\frac{dy}{dx}\big|_{x=x_1} + O(h^2) = y(x_1) + hf(x_1,y_1) + O(h^2)$

$$\Rightarrow \boxed{y_{i+1} = y_i + hf(x_i,y_i)}$$

ג) דיוק של h^2.

2) רונגה-קוטה: א) סדר II: משתמשים בנקודת אמצע:

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$K_2 = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h,\ y_n + \tfrac{1}{2}K_1)$$
$$y_{n+1} = y_n + K_2 + O(h^3)$$

דיוק של h^3

ב) סדר IV:

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$K_2 = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h,\ y_n + \tfrac{1}{2}K_1)$$
$$K_3 = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h,\ y_n + \tfrac{1}{2}K_2)$$
$$K_4 = hf(x_n + h,\ y_n + K_3)$$
$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}K_1 + \tfrac{1}{3}K_2 + \tfrac{1}{3}K_3 + \tfrac{1}{6}K_4 + O(h^5)$$

דיוק של h^5

שיטה בגודל הצעד - כדי לשפר את הדיוק נשחק בגודל הצעד. לשם כך לוקחים צעד נשען שרירותי h_0 ומקבלים דיוק $\Delta_0 \approx h_0^5$. היחס אותו משחקים הוא: $\boxed{h_1 = h_0 \left|\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\right|^{0.2}}$
h הוא הצעד שלא נותן דיוק Δ_1. אם $\Delta_1 > \Delta_0$ אז מקטינים את הצעד לפי המשוואה וחוזרים על הצעד הספציפי. אם $\Delta_1 < \Delta_0$ אז אפשר להגדיל את ה-h של הצעד הבא.

1) טרנספורם, משפט הקונבולוציה:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{i\omega t}\, dt$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi i f t}\, dt$$

הגל $e^{-2\pi i f t}$ אחר מחזור של $\Delta t = \frac{1}{f}$. הגל מוכפל בערך (הזמן) — נותן את המקדם $H(f)$

קורלציה לחשיבות של התדירות f.

קורלציה: $\mathrm{corr}(g,h) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau+t) h(\tau)\, d\tau$, $\mathrm{corr}(g,h) \Leftrightarrow G(f)\cdot H^*(f)$

2) טרנספורם בדיד: מחלקים את הזמן לנקודות בדידות: $t_n = n\Delta$, $h(t_n) \to h_n$

האינטגרל הרציף מוחלף בסכום בדיד: $\Rightarrow H(f) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{2\pi i f n\Delta} \Delta$

וכיוון ש- $H(f)$ מחזורית ב-f עם מחזור $\frac{1}{\Delta}$ ולכן מספיק להגביל את עצמנו לחישוב

בתחום $\left(-\frac{1}{2\Delta}, \frac{1}{2\Delta}\right)$. התדירות המקסימלית הנה קרויה גם תדירות קריטית $f_c \equiv \frac{1}{2\Delta}$

כדי לבחור את f_c צריך יותר מהתדירות המקסימלית, אחרת תדירויות גבוהות מ- f_c

ישיבו לתרום ל-$h(t)$ ויכלו כאילו הן תדירויות נמוכות יותר (aliasing - תופעה מוכרת).

מחלקים את המרחב ל-N נקודות שוות: $-\frac{N}{2} \le k \le \frac{N}{2}$, $f_k = \frac{k}{N\Delta}$

$$H_k = \frac{1}{\Delta} H(f_k) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{2\pi i n \frac{k}{N}} \Rightarrow h_n = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \Delta H_k e^{-2\pi i \frac{k}{N\Delta} n\Delta} \frac{1}{N\Delta}$$

$$\Rightarrow h_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{-2\pi i \frac{k}{N} n}$$ (ניתן להוסיף ל-k כפולות של N)

3) FFT: מפרקים את H_k לאיברים זוגיים ואי-זוגיים, כשמשתמשים ב-N שהוא חזקה של 2.

כל איבר שמתקבל מחלקים שוב להתפרקות של איברים זוגיים ואי-זוגיים, עד שמגיעים

למצב של N איברים בודדים $h_n = H_k^{eoo\ldots}$ כלומר איבר אחד ולא סכום.

עכשיו, מחברים את N האיברים, כך שיש $\log_2 N$ שלבים, כל שלב N מכפלות.

סה"כ $N\log_2 N$ חישובים. הסכום הרגיל דורש N מכפלות לכל k, כאשר ל-k יש N ערכים.

לכן ב-FFT $N\log_2 N \ll N^2$ יש הרבה פחות חישובים.

IX מספרים אקראיים

1) Linear Congruential Method: $I_{n+1} = (aI_n + c)\mod(m)$

מתחילים עם seed (מס התחלתי) I_0 כאשר $a, c > 0$; $m > I_0, a, c$.

אז m קובע לנו את גודל המחזור (מס' המחזוריות). ניתן לבדוק את המשוואה גם עם $c=0$.

2) ייצור התפלגות אקראית - התפלגות אחידה (במקרים כלליים)

אנו רוצים לקבל התפלגות הרצויה: $P(r\le r') = P(x \le x(r'))$

3) שיטת הבדיקה: א) מגרילים x בהתפלגות אחידה $x_{min} < x < x_{max}$.

ב) מגרילים y בין 0 ל-$f(x)$.

ג) מקבלים את x רק אם $y \le f(x)$.

4) שיטת ההיפוך: בהנתן מס' מגרילים בהתפלגות אחידה $p(x)=1$ להתפלגות $p(y)$ רצויה.

על כל x נקבל y מסוים, יש שימור הסתברות.

במילים אחרות: $p(y)dy = p(x)dx \Rightarrow p(y) = p(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$

1. $p(y) \propto y^{-\frac12}$, $y: 0 \to 4$

2. נרמול: $\int_0^4 y^{-\frac12}dy = 2y^{\frac12}\Big|_0^4 = 4$

$\Rightarrow p(y) = \frac14 y^{-\frac12}$

3. $p(x) = 1$ בגלל הנרמול

$\Rightarrow dx = p(y)dy \Rightarrow x = \int p(y)dy = \frac12 y^{\frac12} + c$

4. $x=0$ עבור $y=0$ ולכן $c=0$

$\Rightarrow y = 4x^2$

נגריל מספרים x-ים ונציב בתוך הפונקציה לקבל y.

דוגמה מיוחדת: התפלגות גאוסיאנית:

$y_1 = \sqrt{-2\ln x_1}\cos(2\pi x_2)$

$y_2 = \sqrt{-2\ln x_1}\sin(2\pi x_2)$

מגרילים x_1, x_2 בהתפלגות אחידה

ואז שני ה-y מתפלגים גאוסיאנית סביב 0 עם רוחב 1: $p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

5) שילוב בדיקה והיפוך: מקיפים את $p(x)$ בפונקציה $f(x)$ כמה שיותר קרובה ל-$p(x)$ ופשוטה.

זה מוריד את המספר F נסיונות בבדיקה הפשוטה. הכיוון הוא לעבוד עם $f(x)$ כמה שיותר פשוט אנליטית.

א) מנרמלים את האינטגרל $F(x) = \int f(x)dx = A$ ומוצאים הפוך $x = f(A)$.

ב) מגרילים מס' בין $0-A$ ומוצאים את ה-x המתאים.

ג) דוגמים y בין 0 לבין $g(x)$ ב-x שמצאנו.

ד) אם $y<p(x)$ ב-x שמצאנו, מקבלים אותו.

ה) בשגריאה: מגרילים בין 0 ל-1 ואז מקבלים בקצה [illegible] (אם

1/1-0 אז מגרילים ב-1.1).

$\boxed{X}$ **אינטגרציית מונטה-קרלו:**

יש לנו איזור W שקשה לחשב בו, קשה לדגום אותו. מקיפים אותו באיזור V שאת הנפח שלו קל לחשב, וקל לדגום בו. לוקחים N דגימות ב-V ואז:

$$\int f\,dV \approx V\cdot\langle f\rangle \pm V\sqrt{\frac{\langle f^2\rangle - \langle f\rangle^2}{N}}, \quad \langle f\rangle \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

Importance Sampling

מחליפים את f ב- $\frac{f}{p}\cdot p$, כש- $h\equiv\frac{f}{p}$ שהוא בערך קבוע. מציבים את זה

בתוך איבר השגיאה $\sqrt{\frac{\langle \frac{f^2}{p^2}\rangle - \langle \frac{f}{p}\rangle^2}{N}}$, גוזרים ומוצאים ערך מינימלי של איבר השגיאה.

כך מוצאים את ה-p האופטימלי: $p=\frac{|f|}{\int|f|\,dV}$ ואז האינטגרל

יהיה שווה ל- $\langle \frac{f}{p}\rangle$ עם איבר השגיאה המינימלי שחישבנו.

במובן של דבר זה אומר שמתמקדים יותר באיזורים בהם יש ל-f ערך גבוה.

שגיאה $\frac{1}{\sqrt{N}}$

Stratified Sampling

מחלקים את איזור הדגימה לתת-איזורים, בכל איזור יחסית המומנט, וזה מוריד את השונות בכל איזור, מה שמוריד את השגיאה.

ואז בשיטה הזו לוקחת יותר דגימות באיזורים שהשונות גדולה.

שגיאה $\frac{1}{N}$

שילוב שיטות:

מחלקים את האיזור למספר תת-איזורים ובכל איזור מבצעים דגימות לפי חשיבות.

VEGAS: 1) חלוקה למלבנים ובכל אחד [illegible].

2) בחירת צפיפות לפי חשיבות בנסיון למצוא p אופטימלי.

3) [illegible] פונקציה צפופה רב-מימדית שהיא מכפלת [illegible]:

$$p\propto g_x(x)\,g_y(y)\,g_z(z)\cdots$$

על פונקציה בכל ממד:

$$g(x)\propto\left[\int dy\int dz\ldots\frac{f^2(x,y,z,\ldots)}{g_y(y)\,g_z(z)\cdots}\right]^{1/2}$$

4) [illegible] g [illegible].

5) [illegible] m אינטגרציות [illegible].

בכל אינטגרציה N חישובי הפונקציה.

התוצאה הסופית:

$$I_{best}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\frac{I_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\sigma_i^2}}, \quad \sigma_{best}=\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\sigma_i^2}\right)^{-1/2}$$

XI פונקציות נראות - χ^2

1) התפלגות פואסון: $p(r,\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}$; $\mu=\lambda$; $Var=\lambda$

2) התפלגות גאוסית: $p(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$; $\mu=\mu$; $Var=\sigma^2$

3) נראות: $\mathcal{L}(\bar a)=\prod_{i=1}^{N}p(y_i,f(x_i,\bar a))$

בד"כ עובדים עם $W=\log\mathcal{L}$ ומחפשים מקסימום ל-W. באופן כללי צריך [illegible]

לכן שמקסימום נראות זה מינימום χ^2: $\chi^2=\sum_i[y_i-f(x_i;\bar a)]^2/\sigma^2$

עבור התפלגות גאוסיאנית. ונזכור שלפי חוק המספרים הגדולים כל התפלגות שואפת להתפלגות גאוסית.

אם אין מספיק נתונים מבצעים את -: Unbinned ML : $\mathcal{L}=\prod_{i=1}^{N}f(x_i,\bar a)$

זה משמש את המידע שנתון לנו, ואז לא צריך מידע על סוג המודל. הבעיה היא שה-L הזה תמיד יתן פונקציה a, תמיד יתן מקסימום (אבל לא מה טיבו).

XII משוואות

לצערי, לא הספקנו את החלק הזה [illegible] NR. [illegible]

XIII ספליינים

1) Cubic Spline - הכנה: אם מחברים אינטרפולציה לינארית: $y=Ay_j+By_{j+1}$

$A=\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}$, $B=1-A=\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}$

מקבלים נגזרת שניה אפס מחוץ בנקודות ואינסוף בקצוות.

2) משפרים את הפולינום: מוסיפים גם את הנגזרות השניות:

$$y=Ay_j+By_{j+1}+Cy''_j+Dy''_{j+1}\ ,\quad C=\frac{1}{6}(A^3-A)(x_{j+1}-x_j)^2$$

$$D=\frac{1}{6}(B^3-B)(x_{j+1}-x_j)^2$$

3) מוצאים את הנגזרת: $\frac{dy}{dx}=\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j}-\frac{3A^2-1}{6}(x_{j+1}-x_j)y''_j+\frac{3B^2-1}{6}(x_{j+1}-x_j)y''_{j+1}$

ואת הנגזרת השניה: $\frac{d^2y}{dx^2}=Ay''_j+By''_{j+1}$

4) הדרישה: רציפות הנגזרת הראשונה בקצוות: משווים את $\frac{dy}{dx}$ עבור $x=x_j$ בקטעים (x_{j-1},x_j) ו-(x_j,x_{j+1}) ומקבלים N-2 משוואות עבור y''_i:

$$\frac{x_j-x_{j-1}}{6}y''_{j-1}+\frac{x_{j+1}-x_{j-1}}{3}y''_j+\frac{x_{j+1}-x_j}{6}y''_{j+1}=\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j}-\frac{y_j-y_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}$$

5) ניוטון רפסון עבור מערכת משוואות לא לינאריות: עבור שתי משוואות $g(x,y)=0$ ו-$f(x,y)=0$ אין פתרון כללי. כל אחת מהמשוואות מגדירה מס' לא ידוע של נקודות. בך המעבר של נקודות - זה התכנסות.

מפתחים טור טיילור סביב x ומקבלים:

$$F_i(x+\delta x)=0=F_i(x)+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\delta x_j+O(\delta x^2)$$

פותרים את δx בשיטות לינאריות (LU, גאוס...)

$x_{new}=x_{old}+\delta x$ החישוב הבא. כאן קצב ההתכנסות ריבועי: $\epsilon_{i+1}=\epsilon_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}=\epsilon_i^2\frac{f''(x_i)}{2f'(x_i)}$