מכניקה אנליטית - סיכום

I חשבון וריאציות

פונקציונל: יצור חביב שלוקח פונקציה ונותן מספר. אינטגרל מסוים, למשל, או נגזרת בנקודה הם פונקציונלים. לאורך הקורס אנחנו נעסוק בפונקציונל מהצורה $\int_a^b F[y(x), y'(x), x]$.

וריאציה: בדיוק כמו שיש דיפרנציאלים dy עבור פונקציות, כך יש וריאציות עבור פונקציונלים. כמו הפונקציונל עצמו, גם הוריאציה היא פונקציה בפני עצמה.

$$\boxed{\delta I = I[y(x)+\delta y(x)] - I[y(x)]}$$

חישוב הוריאציה

1) מפתחים את הביטוי $I[y(x)+\delta y(x)]$.
2) מבודדים מתוכו את $I[y(x)]$ המקורי.
3) מזניחים סדרים גבוהים של δy.
4) עושים אינטגרציה בחלקים כדי להוציא מ-$\delta y'$ ל-δy.

ערכים אקסטרמליים

אנחנו מחשבים וריאציות כדי לענות על השאלה: מהי $y(x)$ שמקיימת $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$ שתתן ערך אקסטרמלי לפונקציונל $I[y(x)]$?

במילים אחרות: מהי $y(x)$ כך שהוריאציה $\delta I=0$? על-כן:

5) דורשים שהוריאציה δI תתאפס לכל δy $\Leftarrow$ איפוס הסוגריים.
6) פתרון מד"ר, בהסתמך על תנאי שפה.

a) $I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{1}{2}y'(x)^2 - \alpha y(x)\right)dx$; $\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0$:תנאי שפה

$\underline{1}$ $I[y(x)+\delta y(x)] = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{1}{2}(y'+\delta y')^2 - \alpha(y+\delta y)\right]dx =$

$$= \underbrace{\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{1}{2}y'^2 - \alpha y\right]dx}_{\underline{2}\ I[y(x)]} + \int_{x_1}^{x_2}\left[y'\delta y' - \alpha\delta y\right]dx + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{2}\delta y'^2 dx}_{\underline{3}\ \text{מזניחים סדרים גבוהים}}$$

$\underline{4}$ $\delta I = \int_{x_1}^{x_2}(y'\delta y' - \alpha\delta y)dx = \left[\text{אינטגרציה בחלקים}\right] = \underbrace{y'\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}}_{=0\ \text{תנאי שפה}} - \int_{x_1}^{x_2}(y''+\alpha)\delta y\,dx$

$\underline{5}$ $\Rightarrow y''+\alpha = 0$

$\underline{6}$ פתרון המד"ר

במקום לחשב בכל פעם את הוריאציה, אפשר להשתמש במשוואות אוילר-לגרנז':

1) $F = F(y,y',x)$: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$

2) $F = F(y,x)$: $\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Rightarrow F(y,x) = const \Rightarrow$ אין פתרון

בכל הבעיות ח"ים לזכור את תנאי השפה (קצוות סגורים: $y(a)=y_a$, $y(b)=y_b$).

3) $F = F(y')$: $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0 \Rightarrow y = c_1 x + c_2$

4) $F = F(y',x)$: $\frac{\partial F}{\partial y'} = c \Rightarrow y' = f(x) \rightarrow y = \int f(x)dx$

5) $F = F(y,y')$: $\frac{\partial F}{\partial y'}y' - F = c \Rightarrow y' = f(y) \Rightarrow dx = \frac{dy}{f(y)}$

משוואות EL במספר משתנים

עבור כל אחד מה"סוגים" של המשתנים (x,x',x'' או y,y',y'' וכו') עושים משוואות EL נפרדות, לפי החוקים למעלה וכו', בסך-הכל, מגיעים למשוואות מצומדות.

*) $I[y,z] = \int\left[\frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{2}z'^2 - \frac{1}{2}(y-\alpha z)^2\right]dx$

1 $y: \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = -(y-\alpha z) - y'' = 0$

$z: \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = \alpha(y-\alpha z) - z'' = 0$

$$\left.\begin{aligned} y'' + y - \alpha z &= 0 \\ z'' - \alpha y + \alpha^2 z &= 0 \end{aligned}\right\}$$ משוואות מצומדות

2 $y^{(4)} + y^{(2)} - \alpha z^{(2)} = 0$ גוזרים פעמיים את אחת המשוואות:

$\Rightarrow z'' = \frac{y^{(4)} + y^{(2)}}{\alpha}$

3 $z = \frac{y'' + y}{\alpha}$ ומציבים לתוך המשוואה השניה:

$\Rightarrow \frac{y^{(4)} + y^{(2)}}{\alpha} - \alpha y + \alpha^2\left(\frac{y''+y}{\alpha}\right) = 0$ נשאר רק לפתור את המד"ר.

4 $\{ y = Ae^{\alpha x}$ מכיוון שכל האיברים הם פונקציות של y ניתן לנחש פתרון מסוג:

הצבה פרמטרית של בעיות וריאציה

לפעמים יהיה נוח יותר להגדיר פרמטר חדש לבעיה כדי שאפשר יהיה להפעיל עליה את משוואות EL. להדגמה של שיטה זו ראה תרגיל 2, סעיף 4.

בעיות עם תנאי קצה חופשיים

כאמור, כל בעיה פיזיקלית מתאפיינת בתנאי הקצה שלה. מה קורה ב-A וב-B.

עד עכשיו ראינו מה קורה בתנאי הקצה הקבועים: $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$.

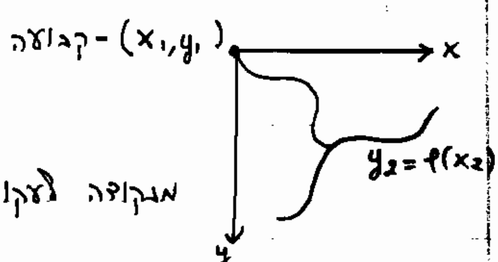
כאשר חלק מתנאי הקצה חופשיים נוסיף לפתרון שלנו תנאים נוספים:

חופשי y_i : $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_i} = 0$

חופשי x_i : $\left.\left(F - \frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{x_i} = 0$

$y_i = \varphi(x_i)$: $\left[F + (\varphi' - y')\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x_i} = 0$

מנקודה לעקומה:



III אילוצים

בבעיות פיזיקליות, תנאי ההתחלה, או חלק מהפרמטרים הבסיסיים של המערכת אותה אנחנו בודקים, יתארו אילוצים בהם נוכל להשתמש כדי לפתור בעיות מינימיזציה עבור אותה מערכת.

- <u>אילוצים מהצורה</u> $\boxed{\phi(y_i, y_i', x) = 0}$

נתון פונקציונל מהסוג הרגיל שלנו: $I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(y_i, y_i', x)dx$. במערכת קיים אילוץ מהצורה $\phi(y_i, y_i', x) = 0$. נשתמש בכופל לגרנג' כדי להגדיר ~~פונקציונל~~ פונקציה חדשה: $\boxed{F^* = F + \lambda(x)\phi}$

$\lambda(x)$ תהיה <u>פונקציה</u> של x:

את הפונקציה החדשה F^* נגזור לפי משוואות EL. יהיו לנו משוואות EL עבור המשתנים y_i, x ותהיה לנו את משוואת האילוץ.

- <u>אילוצים מהצורה</u> $\boxed{\Phi = \int_{x_1}^{x_2} \phi(y_i, y_i', x)dx - c = 0}$

אילוצים אלו, הנקראים אילוצים איזופרימטריים, יוכנסו לתוך פונקציונל חדש I^* באמצעות כופל לגרנג' שיהיה <u>מספר</u> (ולא כמו, ז.א. תלוי ב־x). מכניסים את $\lambda\phi$ לפונקציונל I^*:

$$\left.\begin{aligned} I &= \int_{x_1}^{x_2} F(y_i, y_i', x)dx \\ \Phi &= \int_{x_1}^{x_2} \phi(y_i, y_i', x)dx \end{aligned}\right\} \quad \boxed{I^* = \int_{x_1}^{x_2} F^* dx = \int_{x_1}^{x_2} (F + \lambda\phi)dx}$$

ופותרים משוואות EL עבור הפונקציה החדשה F^*. גם פה, כמשוואה נוספת, נשתמש במשוואת האילוץ. הקבוע c באילוץ מעניין אותנו <u>רק</u> כשאנחנו משתמשים במשוואה ככלי עזר. כשמכניסים את ϕ לפונקציונל <u>מתעלמים</u> מהקבוע c.

II עיקרון ד'אלמבר

העיקרון המלא (הדינאמי) אומר שכאשר מסתכלים על הזזה קטנה $\delta\bar{r}_i$ של חלקיקי מערכת אנו מגבילים את ההסתכלות שלנו לכוחות חיצוניים בלבד: $\boxed{\sum_i (\bar{F}_{i\,ext} - m_i\bar{a}_i)\cdot\delta\bar{r}_i = 0}$

העיקרון הסטטי מפשט את המשוואה ומוריד את תנאי התנע: $\boxed{\sum_i \bar{F}_{i\,ext}\cdot\delta\bar{r}_i = 0}$

בצורה כזו ניתן למצוא את משוואות התנועה של המערכת. את $\delta\bar{r}_i$ מבטאים באמצעות רכיבי הקואורדינטות (למשל $\delta\bar{r}_i = (\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ בקרטזיות) ובונים משוואה שהיא סכום (<u>הכוחות החיצוניים</u> - התנעים)·הוריאציות. בסופו של דבר מגיעים לביטוי מהסוג:
$(\text{וריאציה})\cdot(\text{ביטוי מעניין}) = 0$, שצריך להיות נכון לכל וריאציה. את הביטוי המעניין משווים לאפס ומתוכו מוצאים את משוואות התנועה. דוגמאות ניתן לראות בתרגול 4.

קואורדינטות מוכללות

כל מערכת פיזיקלית ניתן לתאר באמצעות סוגים שונים של קואורדינטות. הסט הנבון ביותר, אותו צריך לעבוד בפורמליזם הלגרנז'יאני, הוא סט הקואורדינטות המוכללות. בסט זה מספר הקואורדינטות שווה למספר דרגות החופש במערכת. דרך אחת למצוא את הסט היא להסתכל על הבעיה טוב טוב ולנחש. עפ"י, דרך אחרת היא לצאת מסט מוכר ולהתחיל להכניס אילוצים. בסך-הכל, <u>כל אילוץ במערכת מוריד דרגת חופש אחת</u>, עד שנגיע נשארים עם הקואורדינטות המוכללות. דוגמאות בתרגיל 4.

מעכשיו ואילך, הקואורדינטות המוכללות יצוינו ב- $\{q_i\}$.

III הפורמליזם הלגרנז'יאני

I הגדרת הלגרנז'יאן

$\mathcal{L}(q_i,\dot q_i,t)$ הוא ביטוי שמכיל פונקציות של הקואורדינטות ושל הנגזרות שלהן בזמן.

הלגרנז'יאן מורכב מהאנרגיה הקינטית והפוטנציאלית של המערכת: $\boxed{\mathcal{L}=T-U}$

כאשר האנרגיה הקינטית T מורכבת <u>רק</u> מנגזרות בזמן של הקואורד', הינו $\dot q_i$. אם במהלך בניית הלגרנז'יאן מסתננות לתוך T גם q_i לא מפרידים אותם, מוסיפים אותם לתוך U ומגדירים פוטנציאל אפקטיבי U_{eff}: $\boxed{\mathcal{L}=T-U_{eff}}$

אפשר להוסיף ללגרנז'יאן ביטויים שלא משפיעים עליו:

$$\boxed{\mathcal{L}(q_i,\dot q_i,t) \Leftarrow\Rightarrow \hat{\mathcal{L}}(q_i,\dot q_i,t)=\mathcal{L}(q_i,\dot q_i,t)+c+f(t)+\frac{d}{dt}[g(q_i,t)]}$$

באותו אופן אפשר לעבוד עם הכפלה בקבוע: $\boxed{\mathcal{L}(q_i,\dot q_i,t)\Leftrightarrow\hat{\mathcal{L}}(q_i,\dot q_i,t)=\alpha\mathcal{L}(q_i,\dot q_i,t)}$

II עיקרון הפעולה המינימלית

> תנועה של מערכת פיזיקלית $\{\bar r_i(t)\}$ המתוארת ע"י הלגרנז'יאן $\mathcal{L}(\bar r_i,\bar v_i,t)$ (או, בקואורד' מוכללות: $\mathcal{L}(q_i,\dot q_i,t)$) וע"י הפעולה $S=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(q_i,\dot q_i,t)dt$ מקיימת <u>מינימום</u> של אותה פעולה עבור תנאי שפה קבועים: $\delta S=0$.

מכאן, גוזרת משוואות EL, מגיעים למשוואות התנועה של המערכת שמתארות את $\{q_i(t)\}$: $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=0}$

אז בונים את הלגרנז'יאן $\mathcal{L}=T-U_{eff}$ ומפעילים עליו את משוואות EL. זה הבסיס.

מפה והלאה יורדים לפרטים הקטנים.

III אילוצים

1) אילוצים הולונומיים:

$$\boxed{f(q_j,t)=0}$$

אלה אילוצים שתלויים רק ב- q_j. בונים לגרנז'יאן חדש מהצורה הבאה:

$$\boxed{\mathcal{L}^* = \mathcal{L} + \lambda f}$$

ובונים משוואות EL עבור $\mathcal{L}^*$:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i}}$$

בצורה הזו ניתן למצוא את λ, שהוא כח האילוץ במערכת. $\lambda \frac{\partial f}{\partial q_i}$ הוא כח אילוץ מוכלל. כדי למצוא את כח האילוץ בקואורדינטות המקוריות, צריך לחזור אליהן:

זה ייתן את הכח "האמיתי", בניוטונים:

$$\boxed{\lambda \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial x}}$$

2) אילוצים לא הולונומיים:

$$\boxed{f(q_j, \dot q_j, t) = \sum_i c_{ji}(q_k)\dot q_i = 0}$$

אלה אילוצים שגם תלויים ב- $\dot q_j$, והם אינם אינטגרביליים. הטיפול בהם קצת יותר מורכב:

א) $\boxed{c_{ji} \equiv \frac{\partial f_j}{\partial q_i}}$

ב) לא מכניסים את האילוצים לתוך הלגרנז'יאן. מקבלים ל- EL:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_j \lambda_j c_{ji}}$$

ג) מבודדים את האילוצים f_j ומסדרים כל אחד מהם לפי הקואור' q_i. המקדמים של $\frac{\partial f_j}{\partial q_i}$ הם המקדמים c_{ji}.

ד) אחרי שפותרים את משוואות EL אפשר להציב בנוסף את האילוצים המקוריים.

ה) בסוף:

$$\boxed{\lambda_j c_{ji} = F_{i,\text{אילוץ}}}$$

*) דוגמה מפורטת שמסבירה את השיטה מופיעה בגיליון 9, עמודים 20-21 ותרגיל 6.

IV סימטריה

1) משפט נתר:

$$\boxed{I = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}(\dot q \chi - \psi_i) - \chi \mathcal{L}}$$

לכל סימטריה רציפה במערכת פיזיקלית יש גודל נשמר. כאשר מערכת בעלת $\mathcal{L}(q_i, \dot q_i, t)$ עוברת טרנספורמציה $\boxed{q_i' = q_i + \varepsilon \psi_i,\ t' = t + \varepsilon \chi}$ כאשר ε הוא פרמטר ו- χ, ψ_i הן פונקציות (ואם הפעולה $\boxed{S'=S}$ אזי יש סימטריה במערכת ומשפט נתר ימצא את הגודל הנשמר I.

כדי לבדוק אם $S=S'$ בודקים: א) $dt' \overset{?}{=} dt$. ב) $\mathcal{L}' \overset{?}{=} \mathcal{L}$.

2) סימטריה בזמן $\Leftarrow$ שימור אנרגיה

אם יש סימטריה בזמן, כלומר t לא קיים בלגרנז'יאן, אזי האנרגיה נשמרת.

זה גם המקום להציג את הביטוי הלגרנז'יאני לאנרגיה:

$$\boxed{E \equiv \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_i}\dot q_i - \mathcal{L}}$$

כאשר חוק שימור האנרגיה מתקיים ניתן לכתוב:

$$\boxed{E = T + U = const}$$

3) <u>סימטריה של הזזה במרחב ⇐ שימור תנע</u>

כאשר קואורדינטה מסוימת q_k לא מופיעה בלגרנז'יאן, התנע שלה אז נשמר. זה נכון להזזות במרחב מסוג $\bar{r}_a \to \bar{r}_a + \bar{\varepsilon}$. התנע הלגרנז'יאני מוגדר כך: $\boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$.

4) <u>סימטריה של סיבוב במרחב ⇐ שימור תנע זוויתי</u>

סימטריית סיבוב מוגדרת $\bar{r}_a \to \bar{r}_a + \delta\bar{\varphi} \times \bar{r}$. לגרנז'יאן של מערכת סגורה יהיה סימטרי תחת סיבוב.

$$\boxed{\bar{M} = \bar{q} \times \bar{p}}$$

V <u>דמיון מכני עבור פוטנציאל הומוגני</u>:

$$\boxed{U(\alpha \bar{r}_a) = \alpha^k U(\bar{r}_a)}$$

במעבר בין מערכות קואורדינטות, כאשר $\bar{r}_a' = \alpha \bar{r}_a$, $t' = \beta t$, שתי המערכות ישתנו כך:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \bar{r}_a' = \alpha \bar{r}_a & ; \ t' = \alpha^{1-\frac{k}{2}} t & ; \ \bar{V}_a' = \alpha^{\frac{k}{2}} \bar{V}_a \\ \bar{P}_a' = \alpha^{\frac{k}{2}} \bar{P}_a & ; \ E' = \alpha^k E & ; \ \bar{M}' = \alpha^{1+\frac{k}{2}} \bar{M} \end{array}}$$

למשל, אם היו נותנים לנו $U(r) = U_0 r^6$ אז $k=6$. את α צריך למצוא מנתוני השאלה. דוגמה לכך בתרגול בית 7.

VI <u>פתרון בעיות חד-מימדיות</u>

לצרכנו, קח תמיד פתיכות. נתון לגרנז'יאן מהצורה:

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2 - U(q)}$$

t לא מופיע ב-L ולכן יש שימור אנרגיה:

$$E = \frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2 + U(q) = const$$

ממשוואת האנרגיה מבודדים את $\dot{q}$:

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{m(q)} [E - U(q)]} = \frac{dq}{dt}$$

ובעזרת אינטגרל מקבלים:

$$\boxed{t = \int_{q(t=0)}^{q} \frac{dq}{\sqrt{[2/m(q)][E - U(q)]}} \Rightarrow t(q) \Rightarrow q(t)}$$

את $q(t=0)$, E אמורים לקבל מתנאי ההתחלה.

<u>בעיית פוטנציאל מרכזי / בעיית שני הגופים</u>

פוטנציאל מרכזי הוא פוטנציאל $U(r)$ שתלוי רק ב-r.

א) חלקיק בשני מימדים תחת פוטנציאל מרכזי מתואר ע"י: $\boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - U(r)}$

ב) לגרנז'יאן של שני גופים מתואר ע"י: $\boxed{L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\bar{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\bar{r}}_2^2 - U(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)}$

ג) זו מערכת סגורה ולכן מתקיים <u>שימור תנע זוויתי</u> $\bar{M} = \bar{r} \times \bar{p}$

ולכן רואים שהתנועה היא מישורית. ניתן להרכיב שני הלגרנז'יאנים:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ ; \ \bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$$

ד) סימטריות: φ חסרה ב-L ולכן p_φ נשמר:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = M = const$$

t חסר ב-L ולכן E נשמר:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + U(r) = const$$

ה) בביטוי של האנרגיה ניתן לשחק (מסגרת 9ב):

$$E=\frac{1}{2}m\dot r^2+\left[\frac{M^2}{2mr^2}+U(r)\right]$$

$$U_{eff}=\frac{M^2}{2mr^2}+U(r)$$

$$E=\frac{1}{2}m\dot r^2+U_{eff}(r)$$

ו) עכשיו תרגיל לבעיה חד-מימדית:

$$\boxed{t=\int_{r(t=0)}^{r}\frac{dr}{(2/m)[E-U_{eff}(r)]}\Rightarrow t(r)\Rightarrow r(t)}$$

ז) ובהינתן $r(t)$ מוצאים $\varphi(t)$:

$$\boxed{\dot\varphi=\frac{M}{mr^2}\Rightarrow\varphi(t)=\int\frac{M}{mr^2(t)}dt}$$

*) נקודה מעניינת: עבור כל פוטנציאל, אם $E=U_{eff\,min}$ ⇐ תנועה מעגלית.

VII תנודות קטנות

1) דרגת חופש אחת

נתונה מערכת פיזיקלית כללית מהסוג: $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m(q)\dot q^2-U(q)$

א) נמצא פתרון מקורב סביב מינימום של $U(q)$. נמצא נק' שיווי משקל:

1 $\frac{\partial U}{\partial q}=0\Rightarrow q_0$

בודקים שהמינימום יציב: $\frac{\partial^2U}{\partial q^2}\Big|_{q_0}>0$ ולמספר המתקבל קוראים k:

$\boxed{k\equiv\frac{\partial^2U}{\partial q^2}\Big|_{q_0}}$

ב) מפתחים את $U(q)$ לטור טיילור עד סדר שני:

2 $U(q)=U(q_0)+\frac{\partial U}{\partial q}\Big|_{q_0}(q-q_0)+\frac{1}{2}k(q-q_0)^2$

הקבוע $U(q_0)$ לא ישפיע על $\mathcal{L}$ והאיבר השני מתאפס:

$\Rightarrow\boxed{U(q)=\frac{1}{2}k(q-q_0)^2}$

ג) מקרבים את המסה $m(q)$ לנק' שיווי המשקל:

3 $\boxed{m(q)\simeq m(q_0)\equiv m}$

ד) מקבלים את הלגרנז'יאן החדש:

4 $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot q^2-\frac{1}{2}k(q-q_0)^2$

ה) מגדירים קואורדינטה חדשה x:

5 $\boxed{x=q-q_0,\quad\dot x=\dot q}$

$\Rightarrow\boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot x^2-\frac{1}{2}kx^2}$

ו) מנחשים עם פתרון כללי מהסוג המוכר:

6 $\boxed{x(t)=Re\{Ae^{i\omega t}\},\ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}$

את הקבוע A מוצאים מתנאי התחלה.

2) מספר דרגות חופש

רוב השלבים הקודמים כמעט זהים לבעיה הקודמת, אלא ש-m ו-k הם מטריצות ומנהים אותם מתוך הלגרנז'יאן. בשלב ה', מגדירים, כאמור:

5 $x_i=q_i-q_i^{(0)}$

ואז מקבלים לגרנז'יאן ארוך ונחמד:

6 $\boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot x_i\dot x_k-k_{ik}x_ix_k)}$

כשמציבים את המטריצות m_{ik},k_{ik} צריך לשים לב ש-k_{ik} היא מטריצה סימטרית $\boxed{k_{ik}=k_{ki}}$. ב-$\mathcal{L}$ בסכום-כלל נקבל רק חלק מהביטויים ($2kx_1x_2$, אבל לא כמו דבר עבור x_2x_1). זה בסדר - את הביטויים הסימטריים פשוט מחלקים לשניים.

גם פה מנחשים עם פתרון כללי דומה מאוד, כאשר $\bar A$ וקטור קבוע:

7 $\boxed{\bar x=\bar Ae^{i\omega t}}$

משוואות EL מקבלות את הצורה:

8 $\boxed{(-\omega^2m_{ik}+k_{ik})\bar A=\bar 0}$

בכדי לא לקבל את הפתרון הטריוויאלי (אפסים) דורשים שהדטרמיננטה של מטריצת EL

תתאפס, ומשם מקבלים תנאים על ω:

$$\boxed{\det\left(-\omega^2 m_{ik} + K_{ik}\right) = 0} \quad \underline{9}$$

בצורה כזו מקבלים את התדירויות העצמיות של המערכת ועבור כל תדירות

עצמית ω_α מוצאים את הוקטור $\bar{A}_\alpha$ המתאים לה:

$$\left(-\omega_\alpha^2 m_{ik} + K_{ik}\right)\bar{A}_\alpha = 0 \quad \underline{10}$$

את הוקטורים העצמיים האלו מציבים חזרה לתוך הפתרון הכללי:

$$\boxed{\bar{x} = \sum_j \bar{A}_{\alpha_j} e^{i\omega_{\alpha_j} t}} \quad \underline{11}$$

3) תנודות מאולצות

עבור אוסילטור הרמוני מכוון מהסוג הבא:

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = F(t)} \quad \underline{1}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}, \quad \omega^2 \equiv \frac{k}{m}$$

אנחנו מגדירים משתנה חדש ונחמד:

$$\boxed{\xi \equiv \dot{x} + i\omega x} \quad \underline{2}$$

כשמציבים אותו לתוך האוסילטור מקבלים:

$$\dot{\xi} - i\omega\xi = \frac{F(t)}{m}$$

עבור המד"ר הפשוטה הזו מספר טעון נשתמש בפתרון:

$$\xi(t) = A(t)e^{i\omega t} \quad \underline{3}$$

כשמציבים פתרון זה לתוך האוסילטור מקבלים אינטגרל עבור $A(t)$:

$$A(t) = \int_0^t \frac{F(t)}{m} e^{-i\omega t}\,dt + A(0)$$

עכשיו מתחילים להציג אחורנית, דרך $\xi(t)$ עד שמגיעים לאינטגרל עבור $x(t)$:

$$\xi(t) = e^{i\omega t}\left(\int_0^t \frac{F(t)}{m} e^{-i\omega t}\,dt + \xi_0\right), \quad \xi_0 = A(0) = \xi(0) \quad \underline{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{\omega}\operatorname{Im}\{\xi(t)\} = \frac{1}{\omega}\operatorname{Im}\left\{e^{i\omega t}\left(\int_0^t \frac{F(t)}{m} e^{-i\omega t}\,dt + \xi_0\right)\right\}}$$

4) מולקולות

נחשוב על מולקולות כעל אטומים שמחוברים בקפיצים. בטיפול שלנו במולקולות נניח:

א) מרכז-המסה נמצא במנוחה.

ב) המולקולה לא מסתובבת.

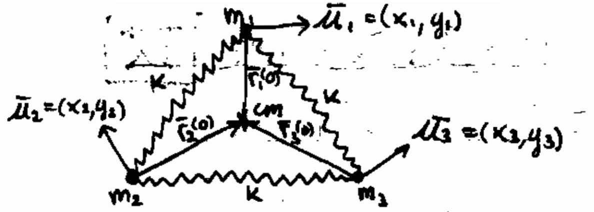
בצורה כזו נבנים אילוצים למערכת ונוריד את מס' דרגות החופש:

א) מולקולה תלת-מימדית: בד"כ יהיו לה $3N$ דרגות חופש, כאשר N מס' האטומים.

מורידים 3 דרגות חופש של מ"מ ו-3 דרגות חופש של סיבוב ומקבלים $3N-6$ דרגות חופש.

ב) מולקולה דו-מימדית: בד"כ $2N$ דרגות חופש. אבל נוריד 2 דח' של מ"מ ו-1 דח' של סיבוב

ונשאר עם $2N-3$ דרגות-חופש.



פתרון מולקולות

כל מסה מתוארת ע"י הקואורדינטות שלה $\bar u_i$

ועל-ידי המרחק שלה ממרכז-המסה $\bar r_i^{(0)}$.

1 $T=\frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\bar u}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\sum_j \dot q_{ij}^2\right) = [\text{לדוגמה}] = \frac{1}{2}m_1(\dot x_1^2+\dot y_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot x_2^2+\dot y_2^2)+\dots$

$U=\frac{1}{2}\sum_i k_i \sum_{j,k}(\bar u_j-\bar u_k)^2 = [\text{לדוגמה}] = \frac{1}{2}k\left[(\bar u_3-\bar u_2)^2+(\bar u_3-\bar u_1)^2+(\bar u_2-\bar u_1)^2\right]$

$\mathcal{L}=T-U$ בהתחלה מוצאים את הלגרנז'יאן במערכת כל הקואורדינטות:

2 א) $\sum_i m_i \bar r_i^{(0)} = const \Rightarrow \boxed{\sum m_i \bar u_i = 0}$ מציבים את האילוצים במקום:

$\Rightarrow m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3=0$

$m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3=0$

ב) $\boxed{\sum m_i \bar r_i^{(0)}\times \bar u_i = 0}$ אין סיבוב:

מחליטים, שרירותית, שנקודה מה היא הנקודה של $\bar r_i^{(0)}$ במדדים יחסית אליה.

עד כה מקבלים שלושה אילוצים הולונומיים שמציבים לתוך $\mathcal{L}$.

3 מציבים את המשוואות M_{ik}, K_{ik} וממשיכים לפתור בעיה של תנודות במספר דרגות-חופש.

בסוף מוצאים שלוש ω עצמיות ושלושה וקטורים עצמיים. אבל במקור היו שש ד"ח.

את דרגות החופש הנוספות מוצאים חזרה מתוך האילוצים.

VIII הלגרנז'יאן של חלקיק חופשי

בעוד האנרגיה הפוטנציאלית משתנה מבעיה לבעיה, אבל כאשר האנרגיה הקינטית היא בעל

ביטוי סגור, עבור מערכות קואורדינטות שונות:

1) קרטזית: (x,y,z)

$$\boxed{\mathcal{L}(x,y,z)=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)-U}$$

2) גליליות: (r,φ,z)

$$\boxed{\mathcal{L}(r,\varphi,z)=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2+\dot z^2)-U}$$

$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z$

3) כדוריות: (r,θ,φ)

$$\boxed{\mathcal{L}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2+r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2)-U}$$

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$

4) גליליות אליפטיות: (u,v,z)

$$\boxed{T=\frac{1}{2}m\left[a^2(\cosh^2u-\cos^2v)(\dot u^2+\dot v^2)+\dot z^2\right]}$$

$x=a\cosh u\cos v,\quad y=a\sinh u\sin v,\quad z=z$

IX דינמיקה של גוף קשיח

1) גוף קשיח מורכב מאוסף של חלקיקים נקודתיים שהמרחקים ביניהם נשארים קבועים. בדרך-כלל נעבוד עם מערכת צירים שמחוברת לגוף ונבחר את נק' מ"מ כראשית מערכת הצירים.

גם כאן האנרגיה הקינטית מתחלקת לשני חלקים: $\boxed{T = T_{trans} + T_{rot}}$

אנרגיית ההעתקה היא כאילו האנרגיה של כל המסה מרוכזת $\boxed{T_{trans} = \frac{1}{2} M \dot{R}_{cm}^2}$

בנק' מ"מ, כאשר $\dot{R}_{cm}$ הוא מהירות מ"מ ו- $\bar{R}_{cm}$ - מרחק מ"מ מראשית של מערכת הצירים של המעבדה.

$$\boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\bar{\Omega} \times \bar{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \bar{\Omega}^T I \bar{\Omega}}$$

אנרגיית הסיבוב מתארת את הסיבוב של כל הנקודות השונות סביב נק' מ"מ.

2) I הוא טנזור מומנט ההתמד. I מאפיין את דינמיקת הסיבוב של הגוף. לשני גופים, בעלי מסות וצורות שונות, תהיה אותה דינמיקת סיבוב אם ה-I שלהם זהים.

מגדירים טנזור מומנט ההתמד: $\boxed{I_{ik} = \sum_j m_j (\bar{r}_j^2 \delta_{ik} - \bar{r}_{ij} \bar{r}_{jk})}$

בכתיב מטריצי:

$$\boxed{I = \begin{bmatrix} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}}$$

במקרה זה עבדנו עם מסות דיסקרטיות וסכמנו אותן. אם המסה מפוזרת באופן אחיד, נעבוד עם צפיפות ρ, שמשמשת באינטגרל מרחבי. לשל, $I_{11} = \iiint \rho (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$

צריך לזכור ש- x,y,z משתנים בשאר מערכות קואורדינטות.

I היא מטריצה סימטרית. ניתן למצוא מטריצה טרנספורמציה שתלכסן את I ותעביר אותה למערכת של צירים ראשיים. במערכת הצירים החישובים יהיו פשוטים יותר. יש שתי דרכים ללכסן את המטריצה I:

1) פיזיקלית: אם מציבים בהתחלה את הצירים הראשיים אפשר מייד לכתוב את המומנטים הראשיים I_1, I_2, I_3. צירי הסימטריה בגוף הם צירים ראשיים. לכן מוצאים את צירי הסימטריה ומציבים אותם. מספיק לבחור ציר סימטריה אחד ולמצוא שני צירים נוספים שיהיו אורתוגונליים לו וזה לזה.

2) מתמטית: מוצאים ערכים עצמיים בעזרת הדטרמיננטה: ($\mathbb{1}$ מטריצת היחידה) $|I - \lambda \mathbb{1}| = 0$

מוצאים וקטורים עצמיים: $(I - \lambda_i \mathbb{1}) \bar{x}_i = \bar{0}$

הוקטורים $\bar{x}_i$ הם הצירים הראשיים.

3) **משפט הציר המוסט**

אהי הנוסחה של משפט שטיינר מקלות I. לפעמים נצטרך לחשב את מומנט התמד סביב ציר שמוסט מהציר שעובר דרך מרכז המסה: במקרה כזה, כאשר $\bar a$ הוא הוקטור שמקשר את ציר מ"מ לציר המוסט:

$$\boxed{I_{\bar a_{ik}} = I_{cm_{ik}} + m\left(\bar a^2 \delta_{ik} - a_i a_k\right)}$$

ובכתיב מטריצי:

$$\boxed{I_{\bar a_{ik}} = I_{cm_{ik}} + m\begin{bmatrix} (a_y^2 + a_z^2) & -a_x a_y & -a_x a_z \\ -a_x a_y & +(a_x^2 + a_z^2) & -a_y a_z \\ -a_x a_z & -a_y a_z & +(a_x^2 + a_y^2) \end{bmatrix}}$$

4) **זוויות אוילר** { θ - הזוית בין $\hat x$ לבין $\hat z$; φ - סיבוב סביב $\hat z$; ψ - סיבוב סביב $\hat x_3$ }

להסבר טוב של מה הן בדיוק זוויות אוילר מומלץ לעיין בעמ' 301 ב- Hand & Finch.

אלה קואורדינטות מוכללות שמתארות את שלוש דרגות החופש של סיבוב הגוף הקשיח סביב מרכז המסה שלו. ניתן להגיע בעזרתן לטנזור שמקשר בין מערכת הצופה (A_x, A_y, A_z) לבין מערכת הגוף (A_1, A_2, A_3):

$$\boxed{\bar A_{x,y,z} = U \bar A_{1,2,3}}$$

$$\boxed{U = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\cos\psi\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\sin\psi\cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi & -\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix}}$$

מערכת הגוף אינה אינרציאלית, ולכן מתקיים גם:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{x,y,z} = \frac{d}{dt}\bigg|_{1,2,3} + \bar\Omega \times$$

וקטור המהירות הזוויתית

במערכת הצופה XYZ:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\varphi\sin\theta \\ \dot\theta\sin\varphi - \dot\psi\cos\varphi\sin\theta \\ \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta \end{bmatrix}}$$

במערכת הגוף x_1, x_2, x_3:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\psi\sin\theta \\ -\dot\theta\sin\psi + \dot\varphi\cos\psi\sin\theta \\ \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta \end{bmatrix}}$$

5) **בניית הלגרנז'יאן**

א) אם מתעניינים בתנועת גוף מ"מ:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M \dot{\bar R}^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} I_k \Omega_k^2}$$

ב) אם רק נקודה אחת בגוף מקובעת במרחב בוחרים אותה כמו ראשית מערכת הצירים של הגוף ומתעניינים רק בסיבוב סביבה (גם המושגים):

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} I_k \Omega_k^2}$$

ג) וכעת בונים את משוואות EL ופותרים את משוואות התנועה.

6) <u>פתרון</u> עם משוואות אוילר

משוואות אלה טובות למקרה שעל הגוף פועלים מומנטים חיצוניים K_i (למשל, כשהכוחות פועלים דרך מרכז-המסה), אז באשר קל, יחסית, לתאר את המומנטים K_i.

כזכור ש-$\bar{K}=\bar{r}\times\bar{F}$ ו-$\bar{r}$ הוא הוקטור שמקשר את מרכז-המסה לנקודה בה פועל הכח. משוואות אוילר הן:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1\dot{\Omega}_1+(I_3-I_2)\Omega_2\Omega_3&=K_1\\ I_2\dot{\Omega}_2+(I_1-I_3)\Omega_3\Omega_1&=K_2\\ I_3\dot{\Omega}_3+(I_2-I_1)\Omega_1\Omega_2&=K_3\end{aligned}}$$

7) <u>סביבונים</u>

מתארים שלושה סוגי סביבונים, בהתאם ליחס בין מומנטי ההתמד:

א) <u>אנטי-סימטרי</u>: $I_1\neq I_2\neq I_3$, $I_3>I_2>I_1$. התנועה מסובכת. המשוואות הכלליות היחידות שמצאתי הן:

$$I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2=2E$$

$$I_1^2\Omega_1^2+I_2^2\Omega_2^2+I_3^2\Omega_3^2=M^2$$

במקרה זה נראה שאין קיצורי דרך והאמת צריך לחשב הכל.

ב) <u>סימטרי</u>: $I_3\neq I_1=I_2$. הלגרנז'יאן הוא: $\boxed{T=\frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{1}{2}I_3(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2}$

ומתקיים עבורו שימור אנרגיה ושימור של התנעים p_φ, p_ψ.

ג) <u>ספרי-סימטרי</u>: $I_3=I_2=I_1$: $\boxed{T=\frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2+\dot{\psi}^2+2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta)}$

IV <u>הפורמליזם ההמילטוני</u>

I <u>מעבר מלגרנז'יאן להמילטוניאן</u>

באם הלגרנז'יאן הוא פונקציה של $\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)$, ההמילטוניאן מורכב מהתנעים: $H(q_i,p_i,t)$.

1) כותבים את הלגרנז'יאן $\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t)$.

2) מחשבים את התנעים המוכללים של המערכת: $p_i=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$.

3) מבטאים את כל ה-$\dot{q}_i$ במערכת בעזרת ה-p_i שחישבנו וכותבים $\boxed{H=\sum p_i\dot{q}_i-\mathcal{L}}$.

4) מתוך H מקבלים את משוואות התנועה: $\boxed{\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}}$

II <u>סוגרי פואסון</u>:

$$\boxed{[f_1,f_2]\equiv\sum_i\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i}-\frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q_i}\right)=f_3(q_i,p_i)}$$

אפשר לעשות איתם כל מיני טריקים, כמו למשל, לבדוק אם f כלשהו הוא קבוע של התנועה במערכת כלשהי שמתוארת ע"י $H(q_i,p_i)$: $\boxed{\dot{f}=[f,H]+\frac{\partial f}{\partial t}}$

אם $\dot{f}=0$, סימן ש-$f=const$.

בד"כ לא צריך לזכור את הביטויים בסוגריים, אלא רק לשחק בתכונות הסוגריים עצמם:

תכונות סוגרי פואסון:

1) $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$

2) $[F(q_i), G(p_j)] = F'(q_i)\,G'(p_j)\,\delta_{ij}$

3) ליניאריות: $[f_1+f_2, f_3] = [f_1,f_3] + [f_2,f_3]$

4) מכפלה: $[f_1\cdot f_2, f_3] = f_1[f_2,f_3] + f_2[f_1,f_3]$

5) אנטי-סימטריות: $[f_1,f_2] = -[f_2,f_1] \Rightarrow [f_1,f_1]=0$

6) זהות יעקובי (ציקליות): $[f_1,[f_2,f_3]] + [f_2,[f_3,f_1]] + [f_3,[f_1,f_2]] = 0$

7) $[q_i,q_k] = [p_i,p_k] = 0$

8) גזירה חלקית (נכ"ל לשניה) בזמן: $\frac{\partial}{\partial t}[f_1,f_2] = [\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2] + [f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}]$

9) <u>משפט פואסון</u>: אם f_1,f_2 קבועים של התנועה, אזי גם $[f_1,f_2]$ קבוע של התנועה.

10) פונקציה סקלרית (φ) לא משתנה תחת סיבוב (M_z): $[\varphi, M_z] = 0$

11) פונקציה וקטורית $\vec{f}$ משתנה רק תחת סיבוב (M_z): $[\vec{f}, M_z] = \hat{f}\times\hat{z}$

III טרנספורמציות קנוניות

1) אלה טרנספורמציות של קואורדינטות ששומרות על משוואות המילטון. טרנספורמציה תהיה קנונית אם ורק אם היא נגזרת מתוך אחת מתוך ארבע פונקציות יוצרות. עבור כל פונקציה יוצרת צריכים להתקיים תנאים מסוימים כדי שהטרנס' תהיה קנונית:

1) $F(q_i,Q_i,t)$:	$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}$	$P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}$
2) $\Phi(q_i,P_i,t)$:	$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}$	$Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}$
3) $F_2(p_i,Q_i,t)$:	$q_i = -\frac{\partial F_2}{\partial p_i}$	$P_i = -\frac{\partial F_2}{\partial Q_i}$
4) $F_3(p_i,P_i,t)$:	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$	$Q_i = \frac{\partial F_3}{\partial P_i}$

כשמקבלים טרנספורמציה אפשר לבדוק אם היא קנונית בשתי דרכים:

1) <u>פונקציה יוצרת</u>: אם אומרים שהטרנס' אמורה להגיע מאחת מארבע הפונקציות היוצרות הנ"ל, בודקים אם היא מקיימת את התנאים. בעזרת תנאים אלו אפשר גם להרכיב את הפונקציה היוצרת המתאימה (דוגמה לזה בתרגיל 14).

2) <u>סוגרי פואסון</u>: צריכים להתקיים שני תנאים:

א) $[Q_i,P_j]_{\{q,p\}} = \delta_{ij}$, כלומר, מביעים את Q,P בעזרת q,p ובודקים את התנאי.

ב) $[Q_i,Q_j]_{\{q,p\}} = [P_i,P_j]_{\{q,p\}} = 0$.

<u>בניית ההמילטוניאן החדש</u>

בכדי שמוצאים את הפונקציה היוצרת F:

$$\boxed{\tilde{H}(Q_i,P_i,t) = H(q_i,p_i,t) + \frac{\partial F}{\partial t}}$$

כאשר את $H(q_i,p_i,t)$ מביעים בעזרת Q_i,P_i מהטרנס'.

2) משפטים נלווים

א) טרנס' שנוצרת על משוואות המילטון, אבל לא על סוגרי פואסון, היא טרנס' של שינוי סקלה.

ב) שינוי בזמן: $[P=p(t+\tau),\ Q=q(t+\tau)]$ היא טרנס' קנונית.

ג) משפט ליוביל: במרחב הפאזה p-q כל המצבים ההתחלתיים של חלקיק מתוארים בכתם (או מפוזרים שונות). לאחר זמן, כל נקודה בכתם תנוע לנקודה אחרת במרחב, לאורך מסלול משלה, ונקבל כתם חדש שמתאר את כל המצבים האפשריים של החלקיק באותו זמן. משפט ליוביל טוען שצורתו של הכתם תשתנה, אך גודל הנפח שלו "ישאר קבוע. כלומר, עבור $[P=p(t+\tau),\ Q=q(t+\tau)]$

נקבל שימור נפח: $\boxed{\int\cdots\int dq_1\cdots dq_n\,dp_1\cdots dp_n=\int\cdots\int dQ_1\cdots dQ_n\,dP_1\cdots dP_n}$

במלים אחרות, היעקוביאן של הטרנס' יהיה 1: $\boxed{D=\frac{\partial(Q_1\cdots Q_n,P_1\cdots P_n)}{\partial(q_1\cdots q_n,p_1\cdots p_n)}=1}$

V משוואת המילטון-יעקובי

מדובר על דרך נוספת להציג כל בעיה מכנית, כמו הפורמליזמים של לגרנז' ושל המילטון. יוצאים מההמילטוניאן ומבטאים אותו בעזרת הפעולה S, כאשר מתייחסים ל-S כאל פונקציה יוצרת שמקיימת את משוואת המילטון-יעקובי:

$$\boxed{H\left(q_1,\dots,q_n,\frac{\partial S}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial S}{\partial q_n},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0}$$

הדרך הטובה ביותר להבין את צורת העבודה היא בעזרת דוגמה מפורשת:

חלקיק בשדה כובד, בשני מימדים

ההמילטוניאן של חלקיק בשדה כובד בציר $\hat{y}$:

$$1\quad H=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+mgy$$

מבטאים את התנעים כנגזרות של הפעולה:

$$2\quad \boxed{p_x=\frac{\partial S}{\partial x},\quad p_y=\frac{\partial S}{\partial y}}$$

ומציבים לתוך משוואת HJ:

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+mgy=0$$

עושים ל-S הפרדת משתנים:

$$3\quad \boxed{S=S_t(t)+S_x(x)+S_y(y)}$$

וחוזרים להסתכל על משוואת HJ כשמציבים את הקבועים α_i לפי הפרדת משתנים:

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial S_t}{\partial t}}_{-\alpha_x-\alpha_y}+\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_x}{\partial x}\right)^2}_{\alpha_x}+\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_y}{\partial y}\right)^2+mgy}_{\alpha_y}=0$$

ה-α_i הם הקבועים, יהיו התנעים של המערכת החדשה. לכן ביטאנו כך α_x,α_y ולא α_t. את $\frac{\partial S_t}{\partial t}$, שגם הוא קבוע, נבטא כ: $-\alpha_x-\alpha_y$ (כאילו שהעברנו אגפים)

פותרים את המד"ר הפשוטות עבור כל קבוע:

$$4\quad \frac{\partial S_t}{\partial t}=-\alpha_x-\alpha_y\ \Rightarrow\ S_t=-(\alpha_x+\alpha_y)t$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial x}=\sqrt{2m\alpha_x}\ \Rightarrow\ S_x=\sqrt{2m\alpha_x}\,x$$

$$\frac{\partial S_y}{\partial y}=\sqrt{2m(\alpha_y-mgy)}\ \Rightarrow\ S_y=\int\sqrt{2m(\alpha_y-mgy)}\,dy$$

הפעולה המתקבלת:

$$5\quad S=-(\alpha_x+\alpha_y)t+\sqrt{2m\alpha_x}\,x+\int\sqrt{2m(\alpha_y-mgy)}\,dy$$

6 $\boxed{\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}}$ עכשיו גוזרים את משוואות התנועה החדשות. לצורך כך יש קבועים חדשים:

$$\beta_x = \frac{\partial S}{\partial \alpha_x} = -t + \frac{mx}{\sqrt{2m\alpha_x}} \Rightarrow \boxed{x(t) = (\beta_x + t)\sqrt{\frac{2\alpha_x}{m}}}$$

$$\beta_y = \frac{\partial S}{\partial \alpha_y} = -t - \frac{1}{mg}\sqrt{2m(\alpha_y - mgy)} \Rightarrow \boxed{y(t) = -\frac{g}{2}(\beta_y + t)^2 + \frac{\alpha_y}{mg}}$$

7 לבסוף, מציבים את תנאי ההתחלה כדי לקבל את הקבועים α_i, β_i

$$x(0) = x_0 \ , \ \dot{x}(0) = V_{0x} \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + V_{0x} t}$$

$$y(0) = y_0 \ , \ \dot{y}(0) = V_{0y} \Rightarrow \boxed{y(t) = y_0 + V_{0y} t - \frac{g}{2} t^2}$$

__וריאציה קטנה__

יש עוד דרך לגלות את הקבועים α_i. עבור קואורדינטה ציקלית (כלומר, בהמילטוניאן מופיע רק התנע הצמוד של הקואורדינטה):

$$\boxed{\frac{\partial S_k}{\partial q_k} = \alpha_k \Rightarrow S_k = \alpha_k q_k}$$

במקרה כזה, למשל, התרגיל שכבר פתרנו "פתר קצת אחרת:

4 $$\frac{\partial S_y}{\partial y} = \sqrt{2m(\alpha_y - mgy)} \Rightarrow S_y = \int \sqrt{2m(\alpha_y - mgy)}\, dy$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} = \alpha_x \Rightarrow S_x = \alpha_x x$$

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = -\frac{\alpha_x^2}{2m} - \alpha_y \Rightarrow S_t = -\left(\frac{\alpha_x^2}{2m} + \alpha_y\right)t$$

העברנו אגפים:

5 $$S = -\left(\frac{\alpha_x^2}{2m} + \alpha_y\right)t + \alpha_x x + \int \sqrt{2m(\alpha_y - mgy)}\, dy$$

6 $$\beta_x = \frac{\partial S}{\partial \alpha_x} = -\frac{\alpha_x t}{m} + x \Rightarrow \boxed{x(t) = \beta_x + \frac{\alpha_x}{m} t}$$

$$\beta_y = \frac{\partial S}{\partial \alpha_y} = -t - \frac{1}{mg}\sqrt{2m(\alpha_y - mgy)} \Rightarrow \boxed{y(t) = -\frac{g}{2}(\beta_y + t)^2 + \frac{\alpha_y}{mg}}$$

קיבלנו α_x, β_x שונים הפעם, בסופו של דבר זה אומר שגם טרנספורמציה קנונית שונה שמביאה אותנו, בהתאם לתנאי ההתחלה, לאותן משוואות תנועה.

VI __אינווריאנטות אדיאבטית__

בכדי שינוי אדיאבטי בשינוי כזה (לא) קפיצתי ואולי איטי, נסתכל על תנועה מחזורית עם זמן-מחזור T ופרמטר λ. השינוי ב-λ יהיה קטן מאוד:

$$\boxed{H(q,p,\lambda(t)) \ : \ \Delta\lambda = \dot{\lambda} T \ll \lambda}$$

במקרה כזה נגדיר אינווריאנט סגור על מחזור התנועה במישור הפאזה:

$$I \equiv \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq \equiv const$$

I הוא האינווריאנטה האדיאבטית. השינוי של I קטן מאוד יחסית לשינוי בפרמטר:

$$\frac{\Delta I}{I} \ll \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

נשים לב שהאינווריאנט I מקיים:

$$\boxed{I \equiv \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq = \frac{1}{2\pi}\oint q\,dp = \frac{1}{2\pi}\oiint dp\,dq \equiv const}$$

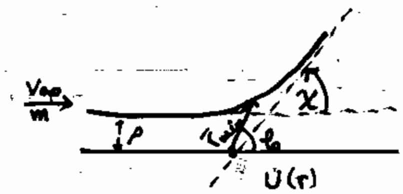
לא תמיד ניתן להשתמש במושג האדיאבטי. __מותר לשנות רק את הפרמטר λ; אסור לשנות את q,p__. במילים אחרות – אסור לגעת בקואורדינטות או בתנעים, אבל כן בכל גודל אחר שמשתנה במערכת (מסה, אורכים, תדירות, אמפליטודה וכו').

חשיבות האינווריאנט I נותן לנו את הקשר שנשמר בין הפרמטרים השונים במערכת.

דוגמה טובה ניתן למצוא בשיעור 27, תרגיל 61.

פיזור וחתכי פעולה

1) חלקיק מגיע מאינסוף בגובה ρ מעל מרכז של פוטנציאל מרכזי $U(r)$ ומפוזר בזווית χ ביחס לציר התנועה המקורי שלו. אנחנו רוצים למצוא את הקשר $\rho(\chi)$.



בבעיה שני קבועי תנועה: האנרגיה של החלקיק: $\underline{1}$ $E=\frac{1}{2}mV_\infty^2$

התנע הזוויתי שלו: $M = m\rho V_\infty$

$\underline{2}$ $\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\#\text{החלקיקים ליח' זמן המפוזרים לתוך } d\Omega}{\#\text{החלקיקים הנכנסים ליח' שטח ליח' זמן}} = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|}$

כאשר $d\Omega$ היא הזווית המרחבית היעודה לשמצה: $\underline{3}$ $\boxed{d\Omega = 2\pi\sin\chi\, d\chi}$

חתך הפעולה הכללי הוא: $\underline{4}$ $\boxed{\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega}$

σ מבטא את השטח דרכו יתפזרו החלקיקים ("שטח הפגיעה").

קיים קשר בין φ_0 (הזווית בין וקטור המרחק המינימלי של החלקיק ממרכז הפוטנציאל לבין ציר התנועה המקורי של החלקיק) לבין זווית הפיזור χ.

$\underline{5}$ $\boxed{\text{פוטנציאל מושך: } \chi = 2\varphi_0-\pi \quad | \quad \text{פוטנציאל דוחה: } \chi = \pi-2\varphi_0}$

בנקודה בה הקירוב מינימלי אין מהירות זוויתית ולכן מתקיים: $\underline{6}$ $E = U_{eff}(r_{min})$

בהינתן r_{min} ניתן למצוא את φ_0: $\underline{7}$ $\boxed{\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty}\frac{dr}{\sqrt{(2/\tilde{m})[E-U_{eff}(r)]}}}$

כאשר $\boxed{\tilde{m} \equiv \frac{M^2}{mr^4}}$ הוא פונקציה של r.

חישוב חתך פעולה דיפרנציאלי בבעית פוטנציאל מרכזי

1) מתוך קבועי התנועה ($\underline{1}$) מוצאים את r_{min}:

למשל, תחת פוטנציאל מרכזי דוחה: $E(r_{min}) = U_{eff}(r_{min}) = \frac{M^2}{2m(r_{min})^2}+\frac{k}{(r_{min})^2}$

ומציבים $M=m\rho V_\infty$ ו- $E=\frac{1}{2}mV_\infty^2$.

2) מוצאים את φ_0 לפי $\underline{7}$.

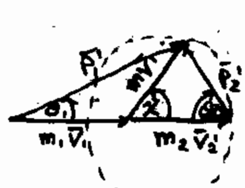
3) מוצאים את $\chi(\rho_0)$ בהתאם ל-$\underline{5}$ וסוג הפוטנציאל.

4) הופכים את הקשר כדי למצוא את $\rho(\chi)$ ומחשבים $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ לפי $\underline{2}$.

2) פיזור שני חלקיקים: הראשון בתנועה והשני במנוחה, תחת פוטנציאל מרכזי $U=\frac{\alpha}{r}$

$\underline{1}$ $\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi}\right), \quad \theta_2 = \frac{1}{2}(\pi-\chi)$

$\underline{2}$ $\boxed{d\sigma = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\frac{\chi}{2})}d\Omega} \longrightarrow$ נוסחת רת'רפורד: $d\sigma \propto E^{-2}$



$\underline{3}$ $d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{mV_\infty^2}\right)^2\frac{\cos(\frac{1}{2}\chi)}{\sin^3(\frac{1}{2}\chi)}d\chi = \left(\frac{\alpha}{2mV_\infty^2}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\frac{1}{2}\chi)}d\Omega$

עבור הבעיה הספציפית שלנו, כאשר $m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ המסה המצומצמת.

VIII נספחים

I לגרנז'יאנים

אנרגיה קינטית של חלקיק חופשי: קרטזיות:

1) $T=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)$

גליליות:

2) $T=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2+\dot z^2)$

$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z$

כדוריות:

3) $T=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2+r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2)$

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$

גליליות אליפטיות:

4) $T=\frac{1}{2}m\left[a^2(\cosh^2u-\cos^2v)(\dot u^2+\dot v^2)+\dot z^2\right]$

$x=a\cosh u\cos v,\ y=a\sinh u\sin v,\ z=z$

אוסילטור הרמוני: דרגת-חופש אחת:

5) $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot x^2-\frac{1}{2}kx^2\ ,\quad x\equiv q-q_0,\ \dot x=\dot q$

מספר דרגות-חופש:

6) $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot x_i\dot x_k-K_{ik}x_ix_k)$

גוף קשיח: מבוטאים בזוויות אוילר:

סביבון [illegible]

7) $T=\frac{1}{2}\left[I_1(\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\theta\sin\psi)^2+I_2(-\dot\theta\sin\psi+\dot\varphi\sin\theta\cos\psi)^2+I_3(\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi)^2\right]$

סביבון סימטרי: $I_1=I_2\neq I_3$:

8) $T=\frac{1}{2}\left[I_1(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta)+I_3(\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi)^2\right]$

סביבון ספרי-סימטרי: $I_1=I_2=I_3\equiv I$:

9) $T=\frac{1}{2}I(\dot\theta^2+\dot\varphi^2+\dot\psi^2+2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta)$

II המילטוניאנים

חלקיק חופשי בשלושה מימדים, בשדה כובד בכיוון $\hat z$:

1) $H=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}+mgz$

אוסילטור הרמוני חד-מימדי:

2) $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{kx^2}{2}=E$

חלקיק חופשי בקואורד' כדוריות:

3) $H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right)+U(r,\theta,\varphi)$

תנועת אור בחומר:

4) $H=\frac{cp}{n(\vec r)}=\frac{c\sqrt{\vec p\cdot\vec p}}{n(\vec r)}$

סביבון סימטרי כבד:

5) $H=\frac{p_\theta^2}{2I_1}+\frac{(p_\varphi-p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}+\frac{p_\psi^2}{2I_3}$

חלקיק חופשי שמתואר ממערכת הנעה במהירות $\bar a$:

6) $H=\frac{\bar p^2}{2m}-(\bar a\cdot\bar p)\leftrightarrow\mathcal{L}=\frac{1}{2}m(\dot{\bar x}+\bar a)^2$

III פיזור וחתך פעולה

בגוף בפוטנציאל הומוגני $U(\alpha\vec r)=\alpha^kU(\vec r)$ מתקיים: $d\sigma\propto E^{\frac{2}{k}}$

IV כח מוכלל:

$$\boxed{F_i=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}}$$