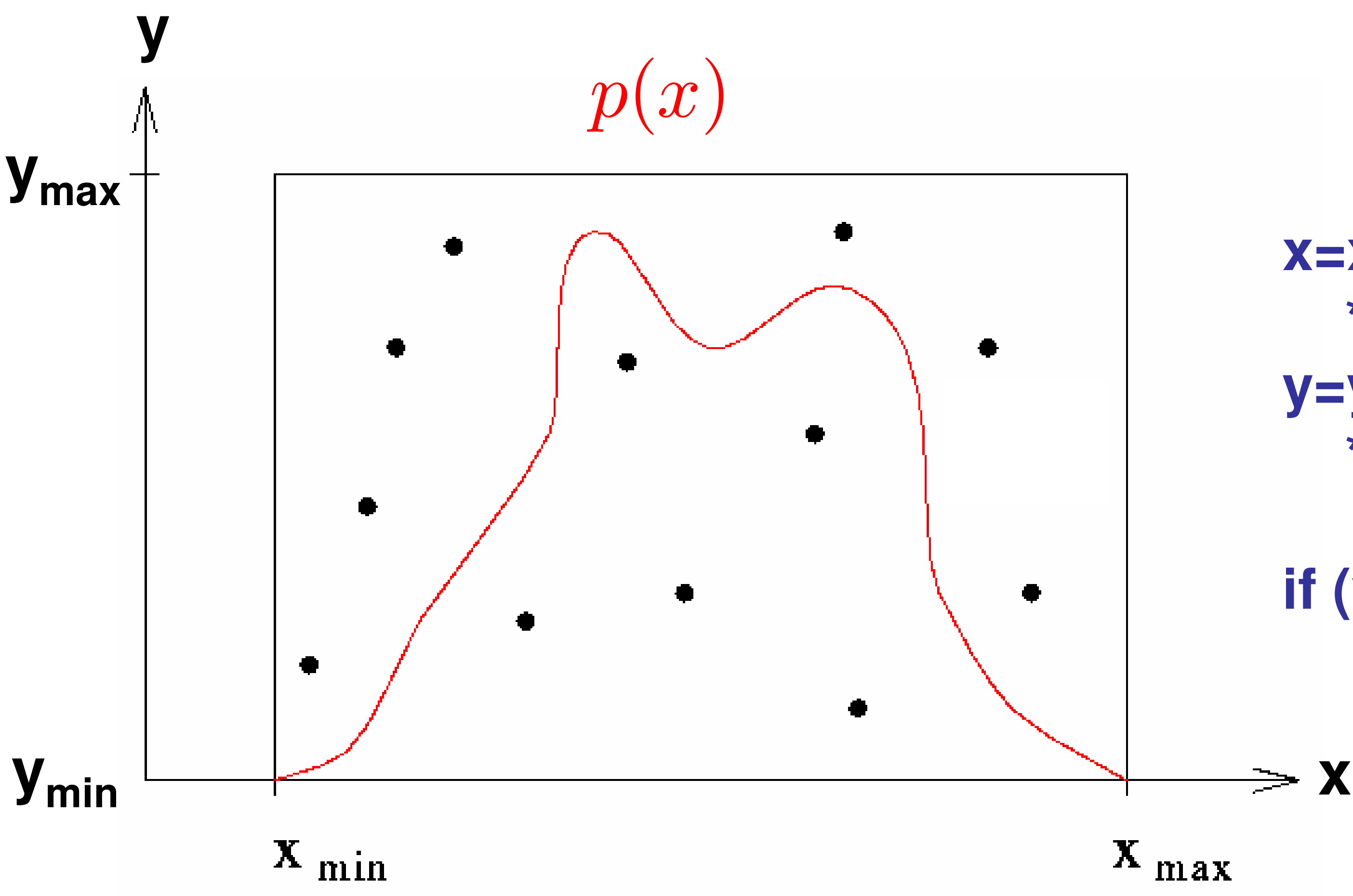
התפלגויות אקראיות

תזכורת: __שיטה 1: שיטת הזריקה:__
מקיפים את p(x) במלבן, זורקים נקודות אקראיות במלבן, ולוקחים רק את הנקודות מתחת ל- p(x).



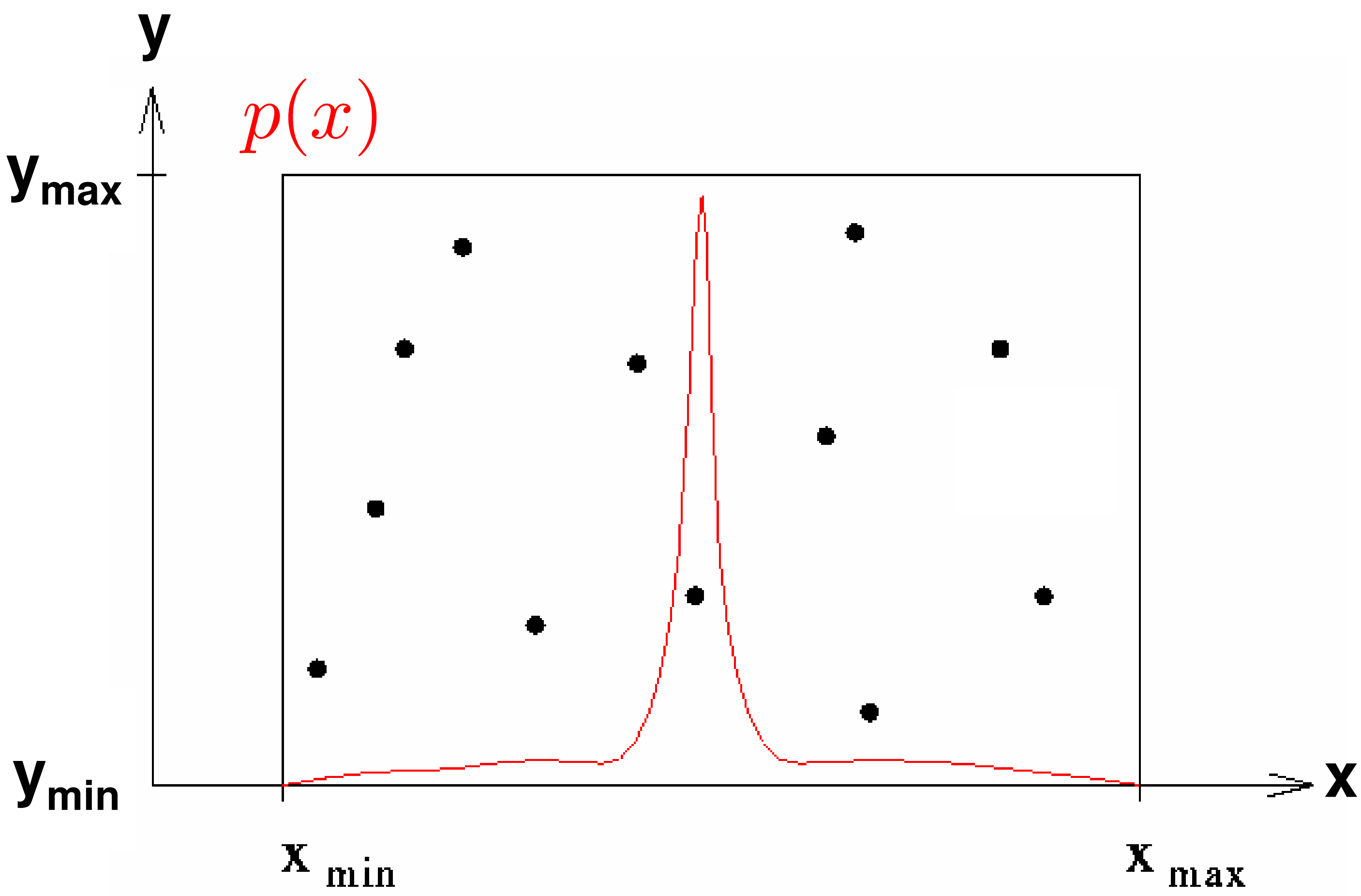

```
x=x_min+(x_max-x_min)
   * ran2(&idum);
y=y_min+(y_max-y_min)
   * ran2(&idum);

if (y < p(x)) …
```

התפלגויות אקראיות

חיסרון: לפעמים שיטת הזריקה איננה יעילה:

אם המלבן הרבה יותר גדול מהשטח מתחת ל- p(x) אז מבזבזים את רוב הנקודות.



שיטה 2: שיטת ההיפוך:

משתמשת בחוק היסוד של טרנספורמציה של הסתברות:

נתונה ההתפלגות האחידה של x:
$$p(x) = 1, \;\; 0 < x < 1$$

אנחנו רוצים לעשות טרנספורמציה (שינוי משתנים) מ-x ל-y כך שנקבל התפלגות $p(y)$ רצויה. המטרה היא למצוא את הטרנספורמציה $y(x)$ שתאפשר לנו לשלוח כל x ל- y המתאים.

חוק היסוד אומר שאם כל x הופך ל- y מסוים, אז יש שימור הסתברות. למשל, אם טווח מסוים של x מכיל 1% מההסתברות, אז הוא נשלח לטווח של y שגם כן מכיל 1% מההסתברות. אם ניקח טווח קטן x – x+dx שנשלח ל y - y+dy, נקבל את חוק היסוד (גם נניח שרק x אחד נשלח אל y מסוים) :

$$p(y)dy = p(x)dx$$

ולכן (כיוון ש-p מוגדר חיובי):

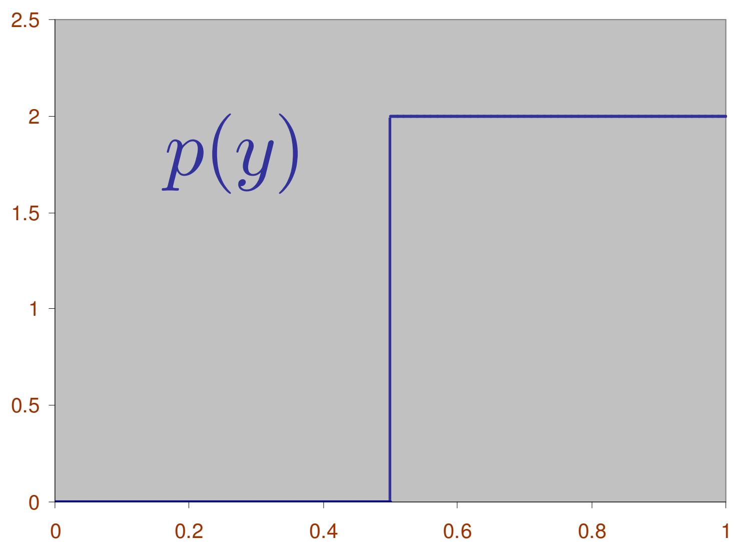
$$p(y) = p(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

התפלגויות אקראיות

תמיד נניח ש- $p(x) = 1$ ולכן: $p(y)dy = dx$

בהינתן p(y), הפתרון הוא: $x = \int p(y)dy \equiv F(y)$

אבל אנחנו רוצים לשלוח את x ל- y: $y = F^{-1}(x)$



<u>דוגמא 1:</u>

קודם מנרמלים את p(y).

אז מחשבים:

$$x = 2y + C$$

משווים את הקצה השמאלי: רוצים ש-

x=0 יישלח ל- y=0.5 . לכן:

$$x = 2y - 1 = \int_{0.5}^{y} p(y)dy$$

התפלגויות אקראיות

<u>הערה:</u> הקצה הימני: x=1 יישלח ל- y=1 . זה היה חייב לצאת, בגלל הנרמול של p(x) ושל p(y) .

עכשיו, פותרים את y כפונקציה של x:

$$y = \frac{1}{2}(x+1)$$

ואז, מגרילים את x בעזרת ran2, למשל x=0.2 נשלח ל- y=0.6 .

<u>דוגמא 2:</u>

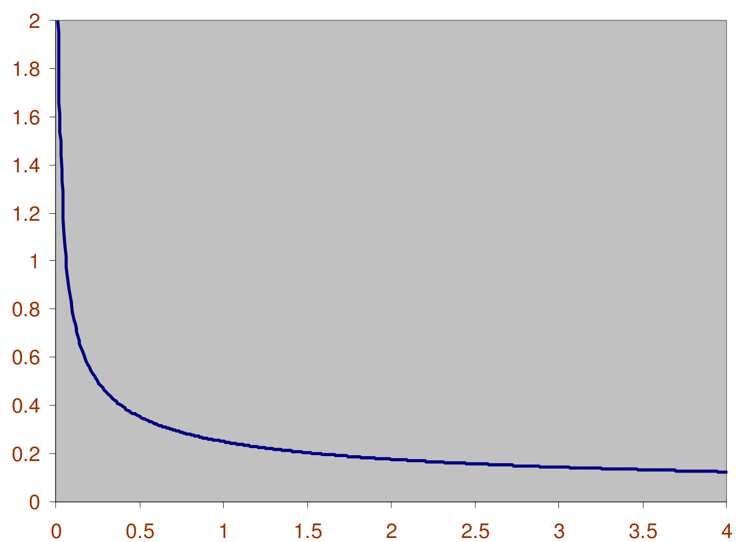
$$p(y) \propto y^{-1/2}, \quad y = 0 - 4$$

נרמול:

$$\int_0^4 y^{-1/2}\,dy \;=\; 2y^{1/2}\,\Big|_0^4 = 4$$

אז:

$$p(y) = \frac{1}{4}y^{-1/2}$$



התפלגויות אקראיות

עכשיו:

$$x = \int p(y)dy = \frac{1}{2}y^{1/2} + C$$

x=0 נשלח ל- y=0: לכן C=0.

פותרים ל- y:

$$y = 4x^2$$

חסרון: לפעמים אין פתרון אנליטי ל- y(x)

<u>דוגמא:</u>

$$p(y) \propto y + e^y$$

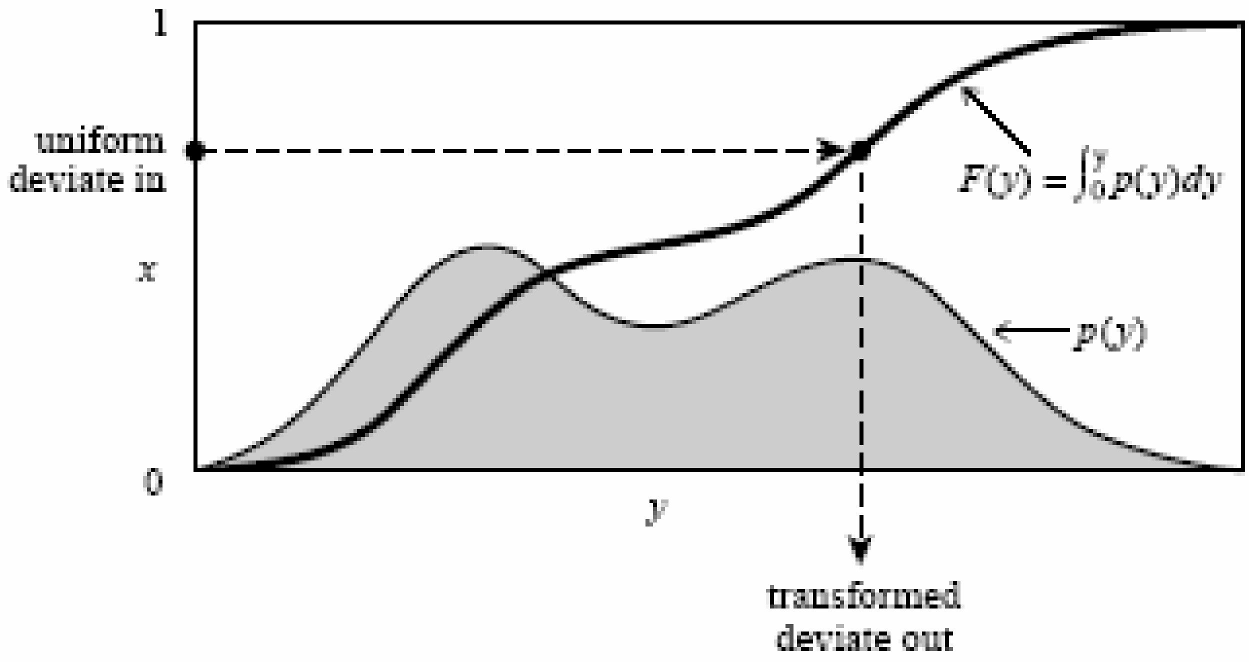
$$x \propto \frac{1}{2}y^2 + e^y$$

$$y(x) = ??$$

התפלגויות אקראיות

<u>תיאור גרפי של שיטת ההיפוך:</u>

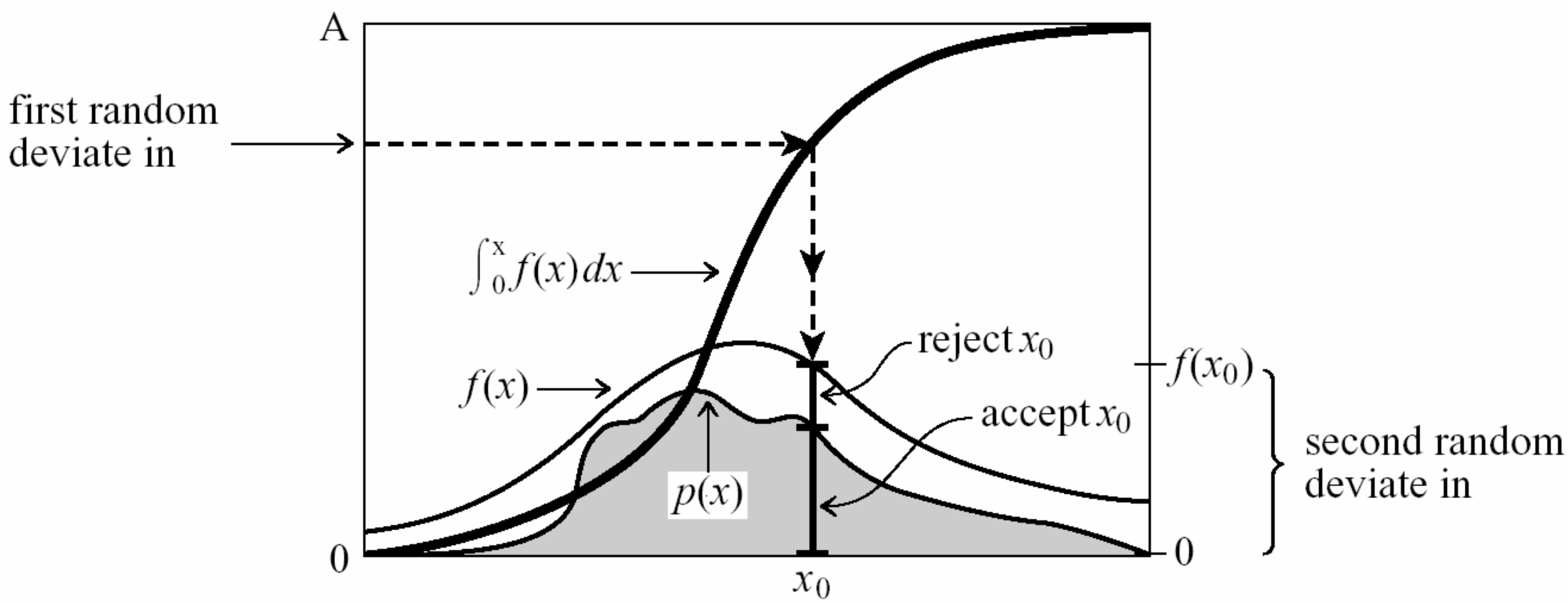
מציירים את p(y), ואת F(y). עכשיו, כל x שולחים ל- y כך ש- F(y)=x, ז"א פונקציה הופכית (מהציר האנכי אל הציר האופקי, ההיפך מגרף רגיל של פונקציה). התוצאה: נקודות y כך שהאחוז בתוך y – y+dy הוא p(y)dy .



התפלגויות אקראיות

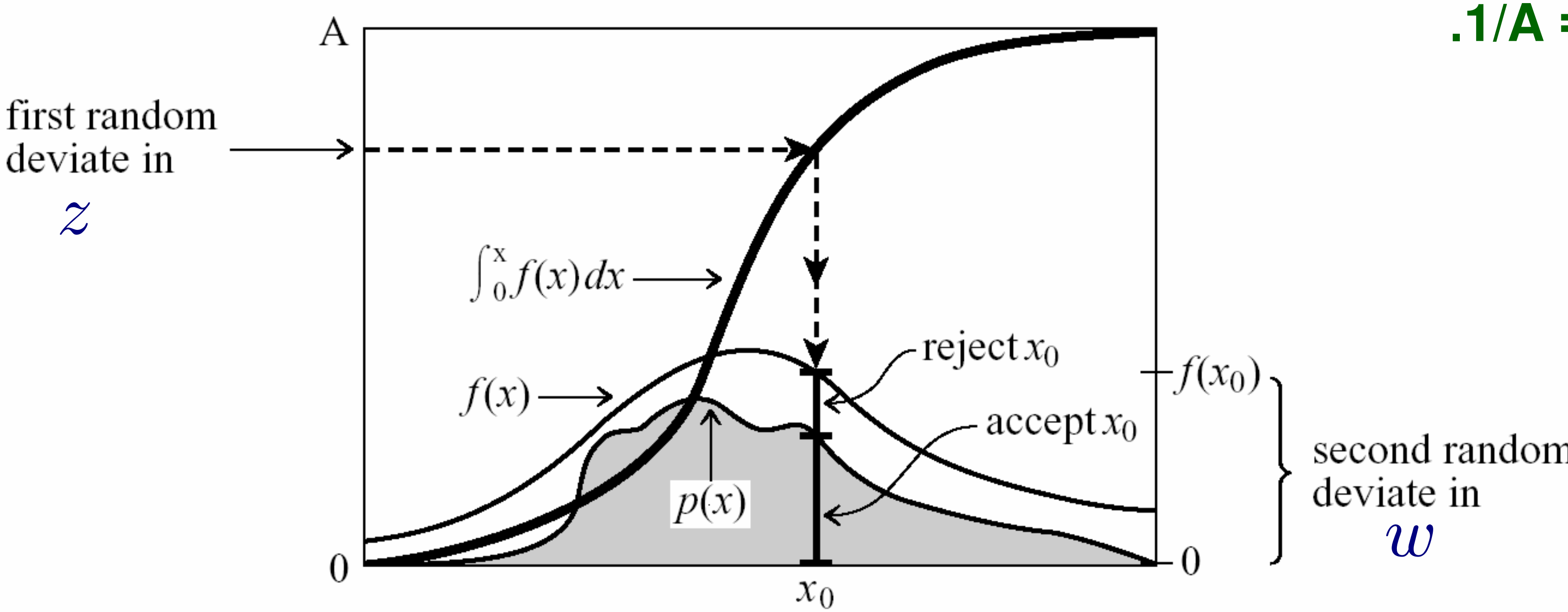
שיטה 3: שילוב שיטות הזריקה וההיפוך:

מציירים את p(x). מקיפים בפונקציה f(x), לאו דווקא מלבן כמו בשיטת הזריקה הפשוטה. חובה ש- f(x)>p(x) בכל x. מנסים ש- f(x) תהיה פונקציה פשוטה וקרובה ל- p(x). אם p(x) מנורמלת, אז f(x) היא לא: השטח מתחת ל- f(x) הוא A>1. משתמשים בשיטת ההיפוך ל- f(x):



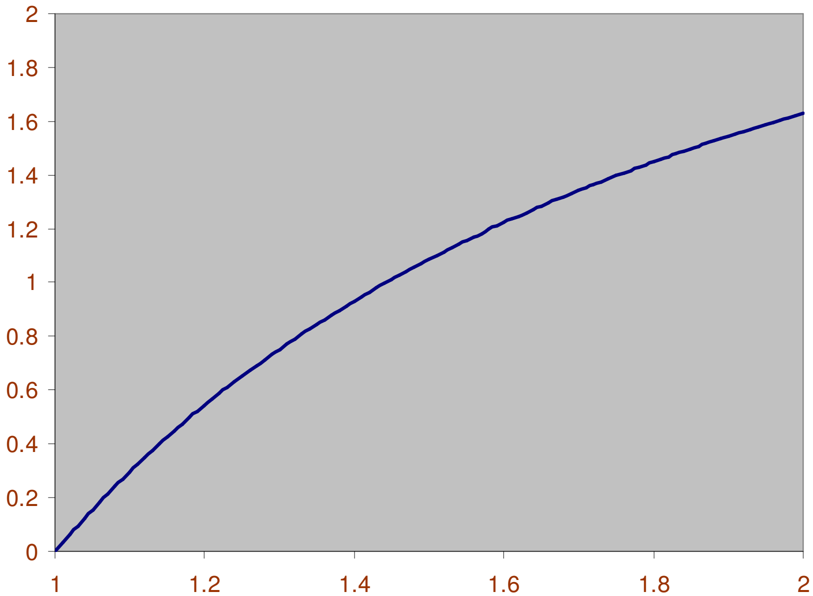
התפלגויות אקראיות

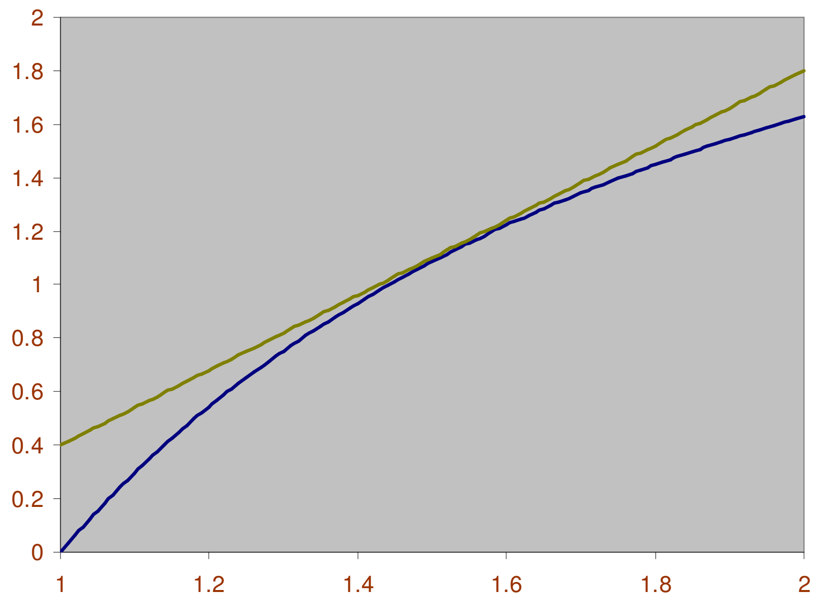
מציירים את $F(x) = \int f(x)dx$. מגרילים מספר z בין 0 ל- A עם ran2, ושולחים אותו ל- x_0 כך ש- $F(x_0) = z$. התוצאה: התפלגות x כך שהסיכוי ל $x - x+dx$ פרופורציונאלי ל- $f(x)dx$. אבל אנחנו רוצים התפלגות $p(x)dx$. אז עושים תיקון דומה לשיטת הזריקה: אחרי שהתקבל x_0 , מגרילים מספר w בין 0 ל- $f(x_0)$. אם $w < p(x_0)$, אז לוקחים את הנקודה x_0 , אחרת זורקים אותה. אחוז הנקודות שמשתמשים בהן = השטח מתחת ל $p(x)$ לעומת $f(x)$ = 1/A.



הערה: משתמשים בשיטת ההיפוך על f(x) ללא נרמול. מבחינה גרפית, זה כמו השיטה הרגילה אבל עם הכפלת שני הצירים ב- A.

התפלגויות אקראיות





דוגמא: **x: 1 - 2**

$$p(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) / \left(1 - \ln(2)\right)$$

בשביל f(x) ניקח קו ישר ונקרב אותו לפונקציה עד כמה שאפשר:

$$f(x) = 1.4\,x - 1$$

אינטגרציה מ x=1 :

$$F(x) = 0.7x^2 - x + 0.3$$

היפוך: פתרון של:

$$0 = 0.7x^2 - x + 0.3 - F$$

התפלגויות אקראיות

הפתרון:

$$x=\frac{1+\sqrt{1-2.8(0.3-F)}}{1.4}=\frac{1+\sqrt{0.16+2.8F}}{1.4}$$

כאשר לקחנו + (לא -) כדי לקבל x=1 כש- F=0.
השטח מתחת ל f(x) הוא:

$$A=F(x=2)=1.1$$

אז עכשיו נגריל מספר בין 0 ל-1 , למשל 0.2.
נכפיל ב- 1.1 <= 0.22 .
אם F=0.22, אז x=1.344 .
עכשיו, f(1.344)=0.881 .
אז נגריל עוד מספר בין 0 ל-1 ,
למשל 0.6 .
נכפיל ב- 0.881 <= 0.529 .
עכשיו, p(1.344)=0.833 .
מכיוון ש- 0.833 > 0.529
אז נשתמש בנקודה זו,
x=1.344 .