פירוק SVD

<u>דוגמא 1:</u> מטריצת מקדמים A שאיננה סינגולארית.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

הפירוק של A:

$$\underset{U}{\begin{pmatrix} -0.8507 & -0.5257 \\ -0.5257 & -0.8507 \end{pmatrix}} \cdot \underset{W}{\begin{pmatrix} 2.618 & 0 \\ 0 & 0.382 \end{pmatrix}} \cdot \underset{V^T}{\begin{pmatrix} -0.5257 & -0.8507 \\ -0.8507 & -0.5257 \end{pmatrix}} = A$$

כיוון שהמטריצה איננה סינגולארית, אין אפסים באלכסון של W. אז:

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 0.382 & 0 \\ 0 & 2.618 \end{pmatrix}$$

ונוסחת ה-SVD נותנת את הפתרון X (היחיד במקרה זה):

$$V \; W^{-1} \; U^T \; B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

פירוק SVD

<u>דוגמא 2:</u> מטריצה A סינגולארית.
(אינסוף פתרונות)

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \overset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \overset{B}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

הפירוק של A:

$$\overset{U}{\begin{pmatrix} -0.4472 & -0.8944 \\ -0.8944 & 0.4472 \end{pmatrix}} \cdot \overset{W}{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot$$

$$\overset{V^T}{\begin{pmatrix} -0.4472 & -0.8944 \\ 0.8944 & -0.4472 \end{pmatrix}} = A$$

כיוון שהמטריצה סינגולארית, יש אפס באלכסון של W. אז, בנוסחת ה-SVD, במקום 1/0 נציב 0:

$$W^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ונקבל פתרון X:

$$V \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T\ B = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

עכשיו: שקף 1 על הלוח

פירוק SVD

<u>דוגמא 3:</u> **מטריצה A סינגולארית.**
(אין אף פתרון)

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \overset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \overset{B}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2.2 \end{pmatrix}}$$

אותה מטריצה A ואותו פירוק כמו בדוגמא 2. אבל עכשיו B שונה ונוסחת ה-SVD נותנת:

$$V \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T B = \begin{pmatrix} 0.232 \\ 0.424 \end{pmatrix}$$

זהו איננו פתרון מדויק, אבל קרוב:

$$A\ X = \begin{pmatrix} 1.08 \\ 2.16 \end{pmatrix}$$

עכשיו: שקף 2 על הלוח

משוואות ליניאריות: סיכום (1)

הבעיה: לפתור את: $A \cdot X = B$ (וגם למצוא את A^{-1} וכולי)

רעיון בסיסי: אלימינצית גאוס-ג'ורדן (סדרת פעולות שמשנות את A ל- I ואת B ל- X).

שיטה 1: ללא שימוש באיברי ציר (רק פעולה ב: הוספת קומבינציה ליניארית של שורות לשורה אחת)

שיטה 2: עם שימוש חלקי באיברי ציר (גם פעולה א: החלפת שורות)

שיטה 3: עם שימוש מלא באיברי ציר (גם פעולה ג: החלפת עמודות)

משוואות ליניאריות : סיכום (2)

<u>רעיון בסיסי 2:</u> מפרקים את A פעם אחת, ואז קל לפתור, לכל B,

את: $A \cdot X = B$

<u>שיטה 1:</u> פירוק LU. L ו- U מטריצות משולש: $L \cdot U = A$

אז פתרון בשני שלבים, עם הצבה קדימה והצבה אחורה:

$$L \cdot Y = B \qquad U \cdot X = Y$$

מפירוק זה, קל למצוא את הדטרמיננטה של A.

<u>שיטה 2:</u> פירוק SVD: $A = U \cdot W \cdot V^T$

כש-A ריבועית, U ו- V הן מטריצות אורתוגונאליות. W היא אלכסונית.

כשאין סינגולאריות: $A^{-1} = V \cdot W^{-1} \cdot U^T$

$$\mathrm{X} = \mathrm{V} \cdot [\mathrm{diag}(1/w_i)] \cdot (\mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{B})$$

משוואות ליניאריות : סיכום (3)

אבל השיטה מתמודדת גם עם A סינגולארית או כמעט סינגולארית.

בכל w_i קטן שמים 0 במקום $1/w_i$ בנוסחא של X !

השיטה מורידה רגישות לשגיאות עיגול. גם נותנת X שימושי כשאין פתרון וכשיש אינסוף פתרונות.

פונקציות ספרייה:

```
void gaussj(float **a, int n, float **b, int m)

void ludcmp(float **a, int n, int *indx, float *d)

void lubksb(float **a, int n, int *indx, float b[])

void svdcmp(float **a, int m, int n, float w[], float **v)

void svbksb(float **u, float w[], float **v, int m, int n, float b[], float x[])
```

עכשיו: שקפים 3-9 על הלוח