אינטרפולציה: סיכום (1)

<u>אינטרפולציה:</u> שיטה להעריך פונקציה בין נקודות נתונות.

<u>רעיון בסיסי:</u> אינטרפולציה ליניארית.

$$y(x) = y_1 + (y_2 - y_1)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

<u>שיטה 1:</u> אינטרפולציה פולינומיאלית:

הפולינום מדרגה n-1 שעובר דרך n נקודות נתון ע"י נוסחת לגרנג'. יותר יעיל לחשב אותו בעזרת האלגוריתם הרקורסיבי של נוויל, כאשר מחשבים את ההפרשים בכל צעד, ובסוף התשובה מתקבלת מסכום של חלק מההפרשים.

אינטרפולציה: סיכום (2)

<u>שיטה 2:</u> אינטרפולציאת ספליין:

מתחילים מאינטרפולציה ליניארית בחלקים. מוסיפים פולינום מסדר 3 כך שמתקיימת אינטרפולציה ליניארית על ה"נגזרת השנייה". קובעים את ערכי הנגזרת השנייה כך שגם הראשונה תהייה רציפה (+ עוד שני תנאי שפה).

<u>שימוש:</u> פעם אחת spline (למצוא את הנגזרות השניות), הרבה פעמים splint .

$$y = Ay_j + By_{j+1} + Cy''_j + Dy''_{j+1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Ay''_j + By''_{j+1}$$

שגיאות עיגול וקיצוץ

נתונה פונקציה שמתבדרת באפס. ניסיון ראשון לתקן:

```
a = (x != 0) ? (exp(x)-1)/x : 1;
```

עדיף לא להשוות בין מספרי float:

```
a = (fabs(x) > 1.e-5) ? (exp(x)-1)/x : 1;
```

שגיאת עיגול נובעת מהדיוק הסופי של המחשב:

$$\sim 10^{-7}, \quad + \,/\, -$$

שגיאת קיצוץ נובעת מפתרון מתמטי חלקי: $x/2$

(בדוגמא זו, תמיד -)

שגיאת עיגול של 1.e-7 ב- x הופכת ל- 1% ב-a:

exp(1.e-5)=1.0000101

a=1.01

שגיאות עיגול וקיצוץ

הקטנת שגיאת הקיצוץ בעזרת טור טיילור:

```
a = (fabs(x) > 1.e-5) ? (exp(x)-1)/x : 1+x/2;
```

שגיאת הקיצוץ: $x^2/6$

אבל 1.e-5 נותן שגיאת עיגול גדולה. עדיף איזון בין שני סוגי השגיאות. שגיאת העיגול קטנה כש-x גדל, ושגיאת הקיצוץ גדלה כש-x גדל. לכן השגיאה הגדולה ביותר היא בנקודת החילוף בין שתי הנוסחאות (1.e-2) :

```
a = (fabs(x) > 1.e-2) ? (exp(x)-1)/x : 1+x/2;
```

שגיאות עיגול וקיצוץ

בדיקת שוויון שגיאות. נקודת החילוף שונה בשביל דיוק רגיל או כפול.

```
a = (fabs(x) > 1.e-2) ? (exp(x)-1)/x : 1+x/2;
```

float

עיגול: $10^{-7}/10^{-2} = 10^{-5}$

קיצוץ: $(10^{-2})^2/6 \approx 10^{-5}$

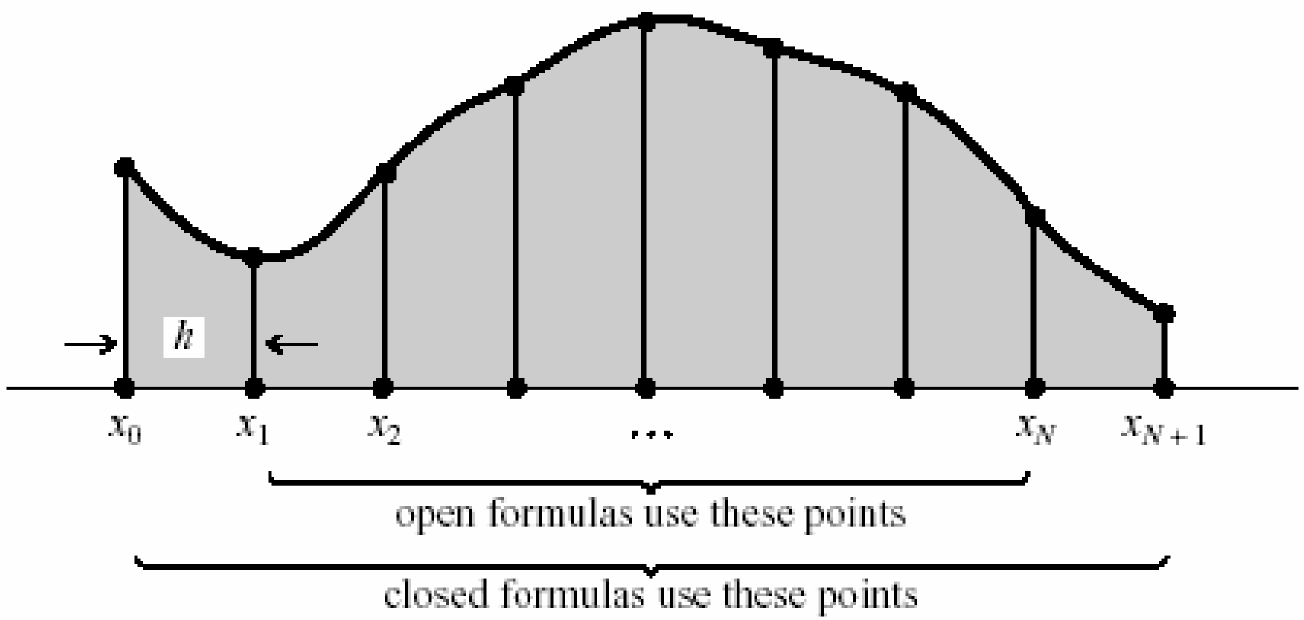
```
a = (fabs(x) > 1.e-5) ? (exp(x)-1)/x : 1+x/2;
```

double

עיגול: $10^{-16}/10^{-5} = 10^{-11}$

קיצוץ: $(10^{-5})^2/6 \approx 10^{-11}$

quadrature:אינטגרציה



<u>רעיון בסיסי:</u> שיטת הטרפז (קשור לאינטרפולציה ליניארית בחלקים).

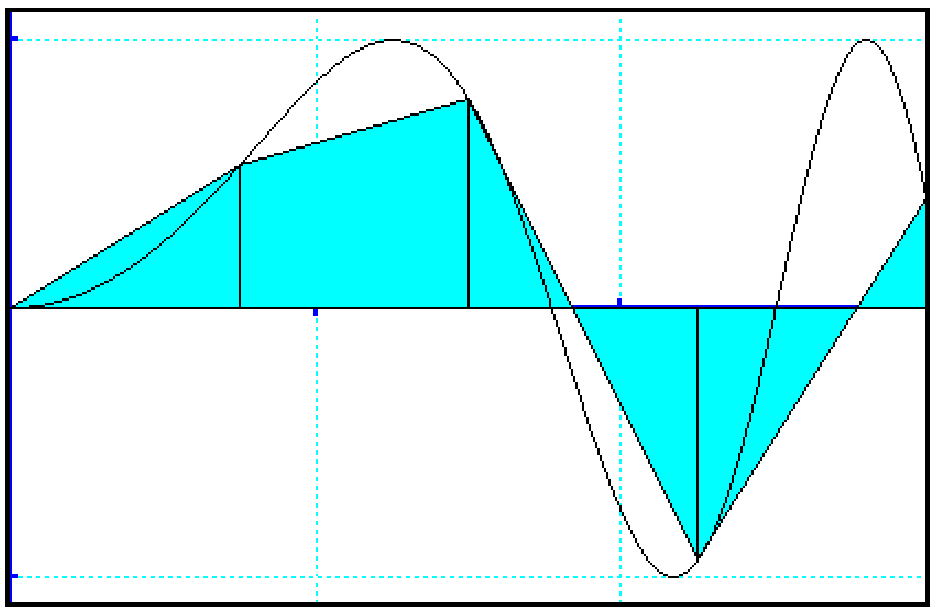
<u>שיטה 1:</u> טרפז, מוסיפים חלקים באופן רקורסיבי.

<u>שיטה 2:</u> שיטת רומברג (קשור לאקסטרפולציה מסדר גבוה).

שיטת הטרפז:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = h\left[\tfrac{1}{2}f_1 + \tfrac{1}{2}f_2\right] \quad + O(h^3 f'')$$

משתמש באינטרפולציה ליניארית. למשל, אם f''=0, אז שיטת הטרפז היא מדויקת. באופן כללי, השגיאה קטנה מהר כש-h קטן. הערה: סכום המקדמים שווה ל- 1 (אפשר להבין למה ע"י הצבת פונקציה קבועה).



שיטת הטרפז:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = h\left[\tfrac{1}{2} f_1 + \tfrac{1}{2} f_2\right] \quad + O(h^3 f'')$$

נוסחאות מורחבות שמתבססות על שימוש בשיטת הטרפז בחלקים:

<u>נוסחא סגורה:</u>

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\tfrac{1}{2} f_1 + f_2 + \cdots + f_{N-1} + \tfrac{1}{2} f_N\right] + O\left(\frac{(b-a)^3 f''}{N^2}\right)$$

חישוב השגיאה (ללא הנחות על f’’) :

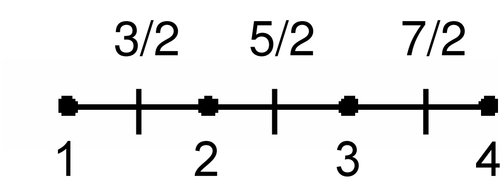
$$(h^3 f'')(N-1) \simeq \left(\frac{b-a}{N}\right)^3 f'' N = \frac{(b-a)^3}{N^2} f''$$

מניחים ש- N>>1

שיטת הטרפז:

<u>נוסחא מורחבת פתוחה:</u>

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x)dx = h\left[f_{3/2} + f_{5/2} + \cdots + f_{N-1/2}\right] + O\!\left(\frac{1}{N^2}\right)$$



הוכחה :

$$h\,\tfrac{1}{2}\,f_{3/2} + h\left[\tfrac{1}{2}\,f_{3/2} + f_{5/2} + \tfrac{1}{2}\,f_{7/2}\right] + h\,\tfrac{1}{2}\,f_{7/2}$$

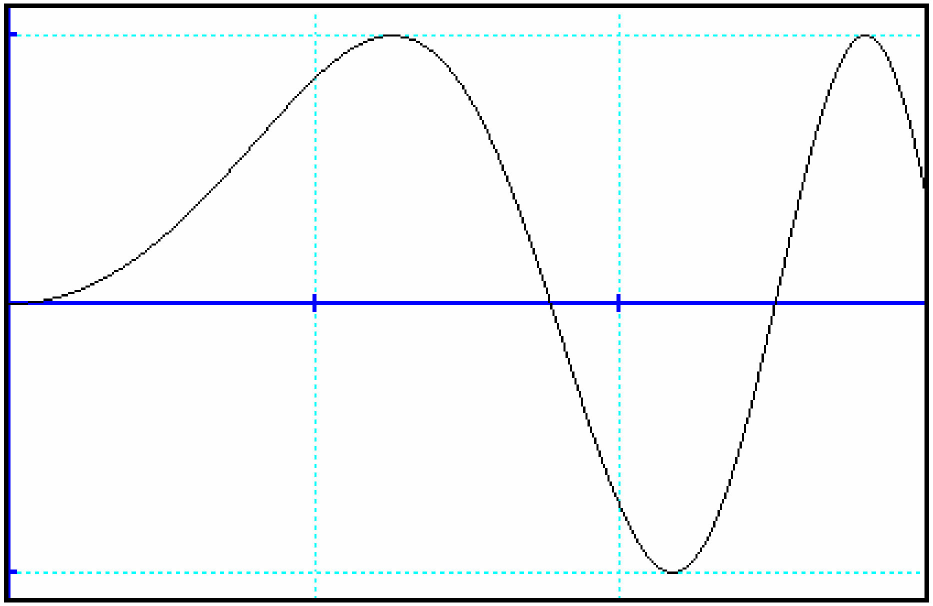
חישוב השגיאה:

$$\frac{(b-a)^3}{N^2}\,f'' + \left(\tfrac{h}{2}\right)^2 f' + \left(\tfrac{h}{2}\right)^2 f' = O\!\left(\tfrac{1}{N^2}\right)$$

שיטת הטרפז:

n	Sum of areas of trapezoids
4	0.43358
8	0.70404
16	0.75723
32	0.76954
64	0.77256
128	0.77331
256	0.77350
512	0.77355
1024	0.77356
2048	0.77356

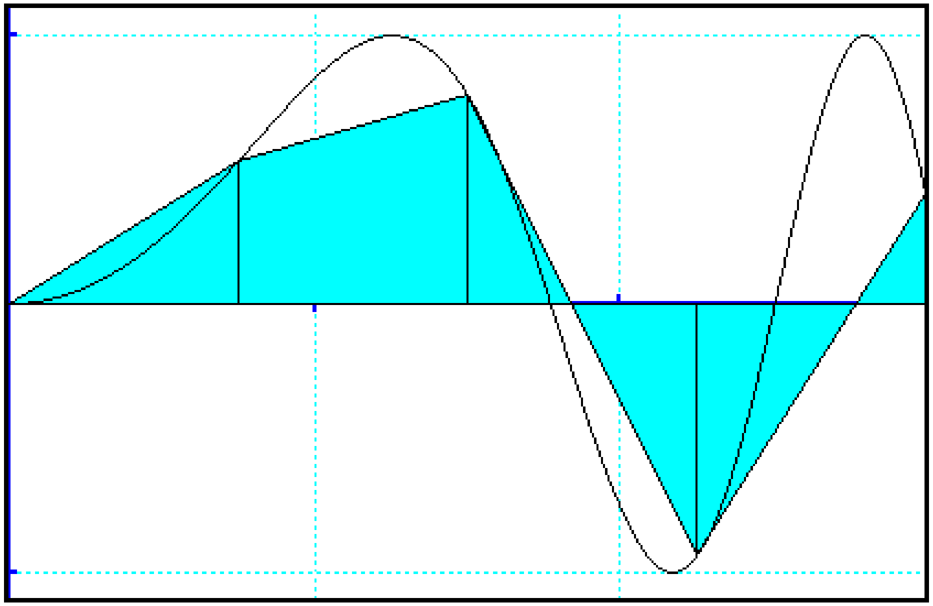
$$\int_0^3 \sin(x^2)\,dx$$



שיטת הטרפז:

n	Sum of areas of trapezoids
4	0.43358
8	0.70404
16	0.75723
32	0.76954
64	0.77256
128	0.77331
256	0.77350
512	0.77355
1024	0.77356
2048	0.77356

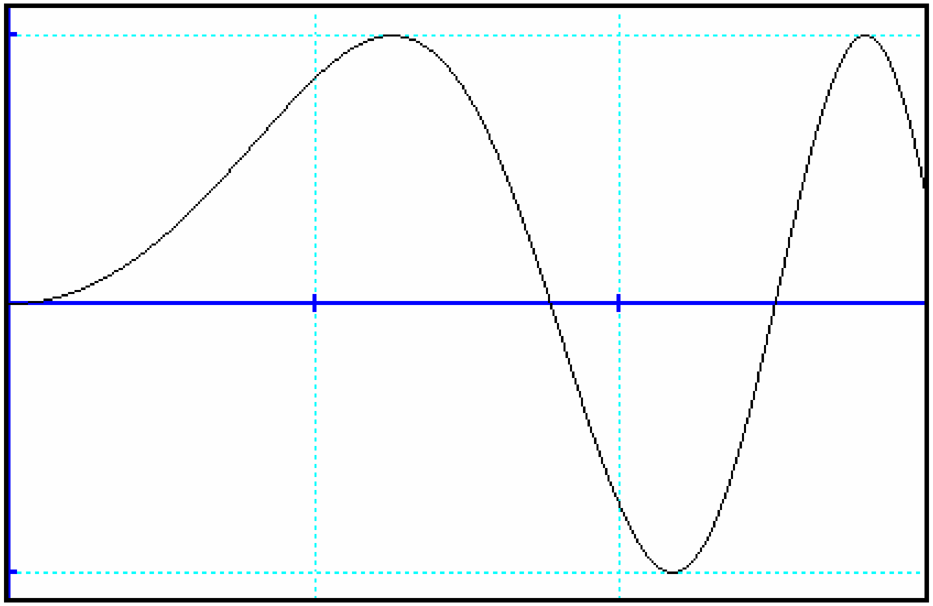
$$\int_0^3 \sin(x^2)\,dx$$



שיטת הטרפז:

n	Sum of areas of trapezoids
4	0.43358
8	0.70404
16	0.75723
32	0.76954
64	0.77256
128	0.77331
256	0.77350
512	0.77355
1024	0.77356
2048	0.77356

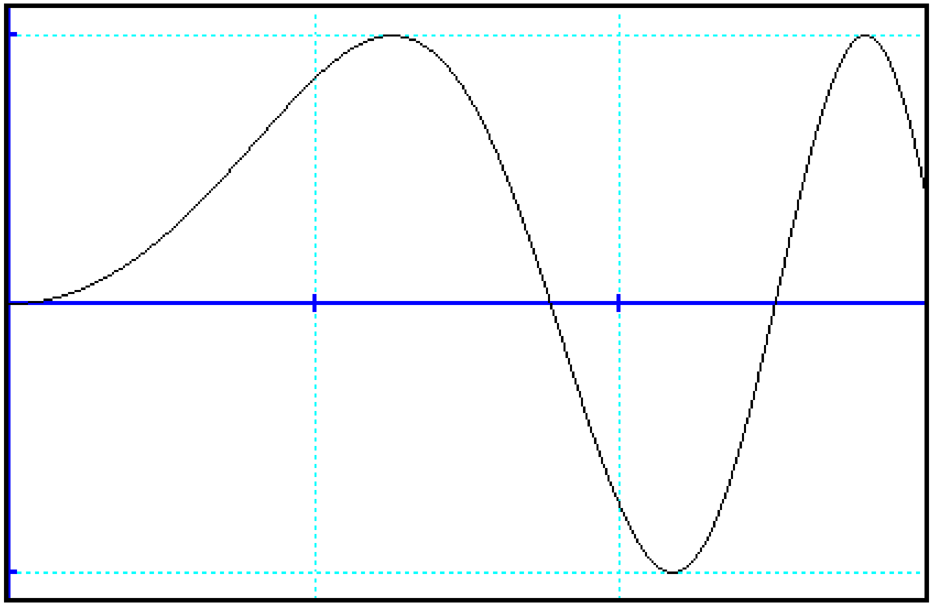
$$\int_0^3 \sin(x^2)\,dx$$



שיטת הטרפז:

n	Sum of areas of trapezoids
4	0.43358
8	0.70404
16	0.75723
32	0.76954
64	0.77256
128	0.77331
256	0.77350
512	0.77355
1024	0.77356
2048	0.77356

$$\int_0^3 \sin(x^2)\,dx$$



שיטת Simpson:

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = h\left[\tfrac{1}{3} f_1 + \tfrac{4}{3} f_2 + \tfrac{1}{3} f_3\right] + O\left(h^5 f^{(4)}\right)$$

כמו שיטת הטרפז, אבל מסדר גבוה יותר. נתונות שלש נקודות (סה"כ רוחב 2h). עוברת בהן פרבולה אחת. נוסחאת סימפסון היא מדויקת עבור פרבולה. מסתבר שהיא גם נכונה לפולינום מסדר 3 (נראה מאוחר יותר למה). הערה: סכום המקדמים שווה ל- 2.

$$f(x) \approx f_0 + x f_0' + \tfrac{1}{2} x^2 f_0'' + \tfrac{1}{6} x^3 f_0''' + \tfrac{1}{24} x^4 f_0''''$$

שיטת Simpson:

<u>נוסחא סגורה (עבור מספר אי-זוגי N) :</u>

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x)dx = h\left[\tfrac{1}{3}f_1 + \tfrac{4}{3}f_2 + \tfrac{2}{3}f_3 + \tfrac{4}{3}f_4 + \cdots + \tfrac{2}{3}f_{N-2} + \tfrac{4}{3}f_{N-1} + \tfrac{1}{3}f_N\right] + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$$

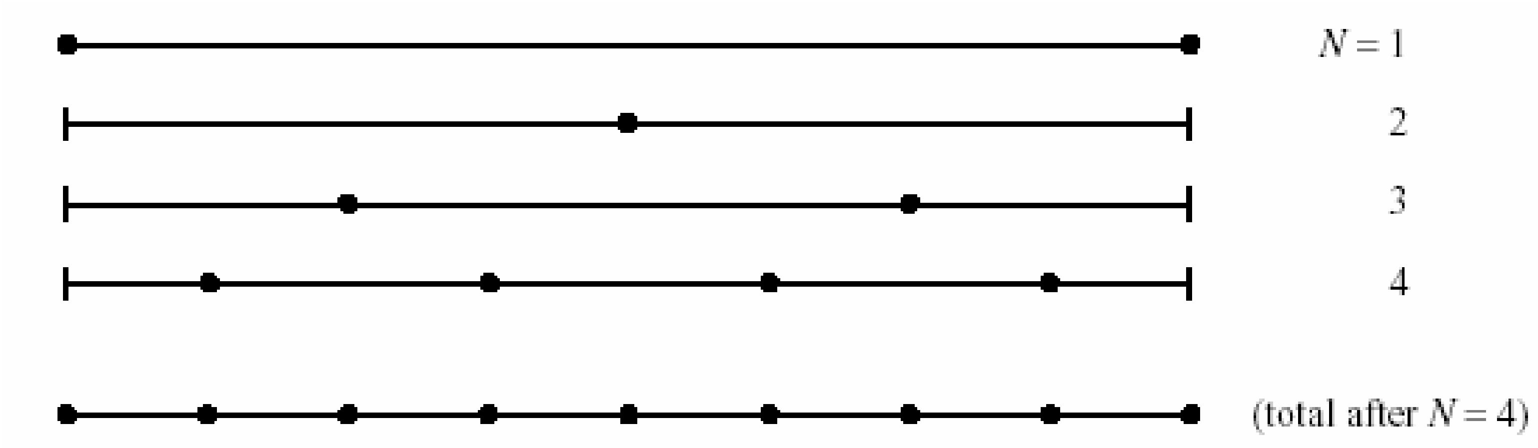
הוכחה :

$$h\left[\tfrac{1}{3}f_1 + \tfrac{4}{3}f_2 + \tfrac{1}{3}f_3\right] + h\left[\tfrac{1}{3}f_3 + \tfrac{4}{3}f_4 + \tfrac{1}{3}f_5\right]$$

חישוב השגיאה:

$$h^5 N = O\left(\frac{1}{N^4}\right)$$

אלגוריתמים:



ניתן להשתמש בשיטת הטרפז, תוך הגדלת מספר הנקודות פי 2 בכל צעד, ותוך שימוש בכל הנקודות הקודמות (אלגוריתם רקורסיבי!). השינוי בכל צעד הוא הערכת השגיאה. ממשיכים עד שיורדים מתחת לשגיאה הרצויה. ההתכנסות היא בקצב 1/N^2 .