פתרון נומרי של משוואות גלים

נניח שניתן לכתוב את המשוואה בצורה: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x}$

למשל: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ היא משוואת גלים עם פתרונות: $u = f(x \pm vt)$

ז"א, גל שנע במהירות v ימינה או שמאלה.

נגדיר: $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ כאשר: $r \equiv v\frac{\partial u}{\partial x}$, $s \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$, אז המשוואות הן: $\frac{\partial r}{\partial t} = v\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial t} = v\frac{\partial r}{\partial x}$

ז"א: $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -v\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} -s \\ -r \end{pmatrix}$ ולכן: $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & -v \\ -v & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}$

אם יודעים את r ואת s, אז מהערך של u בנקודה אחת אפשר לעשות אינטגרלים לפי הנגזרות r ו-s ולמצוא את u בכל x ו- t.

אנחנו נתמקד בדוגמא: $\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x}$ בעלת פתרונות: $u = f(x - vt)$

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

נהפוך את הבעיה מרציפה לבדידה:

$$x_j = x_0 + j\Delta x, \qquad j = 0, 1, \ldots, J$$

$$t_n = t_0 + n\Delta t, \qquad n = 0, 1, \ldots, N$$

את הנגזרת בזמן נעריך כך:
(ניזכר בפרק על נגזרות נומריות)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{j,n} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

<u>היתרון:</u> נוכל לחשב את u בזמן n+1 מ- u בזמן n.

לנגזרת המרחבית נשתמש
בשיטה הסימטרית:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{j,n} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

קירוב זה של הנגזרת בזמן נקרא שיטת אוילר הקידמית.
תזכורת: שיטת אוילר במד"ר:

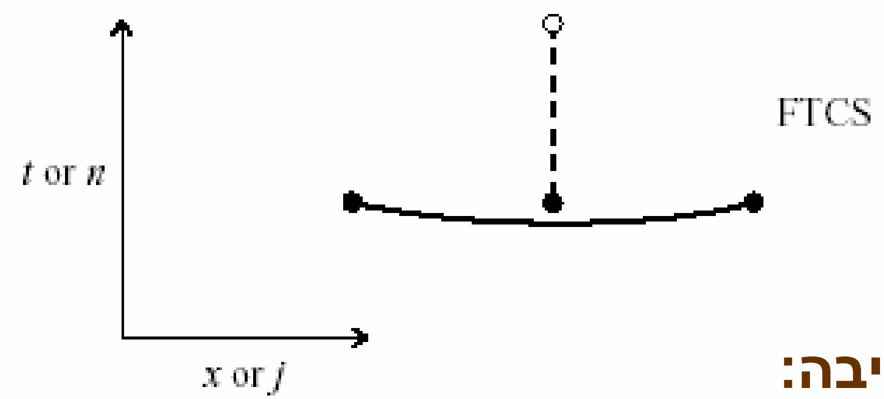
$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y_n)$$

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

המשוואה הבדידה שקיבלנו:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} = -v\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right)$$

נותנת בכל צעד את u בזמן n+1 בכל ה-j .



<u>ייצוג גראפי:</u>
(מראה באיזה u בזמן
n אנחנו משתמשים)

מסתבר ששיטה זו היא לא יציבה:
השגיאה עלולה לגדול מהר בכל צעד.

בדיקת יציבות ע"פ von Neumann

זוהי שיטה להעריך אם קיימים למשוואה בדידה פתרונות אשר מתבדרים בזמן.
נחפש פתרונות בסיס בצורת גל: $u \propto e^{i(kx-\omega t)}$
אנחנו לא מודאגים מהתבדרות ב-x, אז נניח ש- k ממשי, אבל ω אולי לא.
<u>הערה:</u> במשוואה המקורית, זהו פתרון אם: $\omega = kv$

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

אז נחפש פתרונות מהצורה: $u_j^n = \xi^n e^{ikj\Delta x}$ כאשר ξ מספר מרוכב.
נציב במשוואה הבדידה:

$$\frac{\xi^{n+1}e^{ikj\triangle x}-\xi^n e^{ikj\triangle x}}{\triangle t} = -\,v\,\frac{\xi^n e^{ik(j+1)\triangle x}-\xi^n e^{ik(j-1)\triangle x}}{2\triangle x}$$

שנותן:

$$\frac{\xi-1}{\triangle t} = -\,v\,\frac{e^{ik\triangle x}-e^{-ik\triangle x}}{2\triangle x}$$

ו- ξ הוא:

$$\xi(k) = 1 - i\frac{v\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x$$

גודלו הוא:

$$|\xi| = \sqrt{1+(\frac{v\triangle t}{\triangle x})^2\sin^2(k\triangle x)}$$

בפתרון נומרי, השגיאה תהיה סכום של פתרונות בסיס עם כל מיני ערכים של k. אז השיטה איננה יציבה, כי עבור k מסוימים, $|\xi| > 1$ ואז גודל השגיאה מתבדר בצורה אקספוננציאלית. הערה: במשוואה המקורית, הגל נע אך לא משנה צורה או אמפליטודה: $|\xi| = |e^{i\omega\triangle t}| = |e^{ikv\triangle t}| = 1$

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

שיטה שנייה: **שיטת לאקס (Lax)**.
מתחילים מהמשוואה הקודמת:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -v\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right)$$

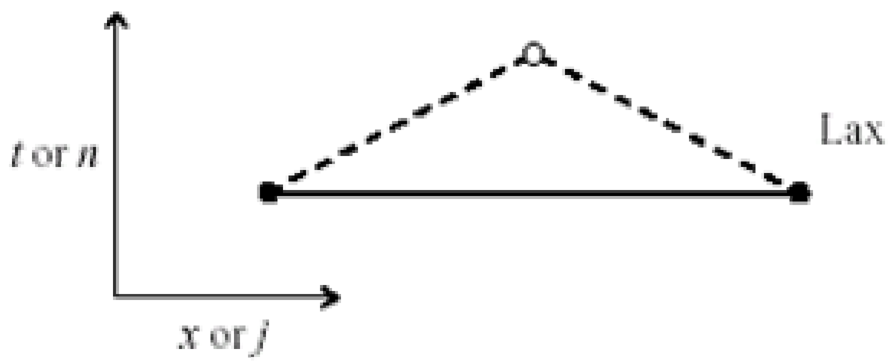
עכשיו עושים את החילוף:

$$u_j^n \rightarrow \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right)$$

התוצאה:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)$$

<u>ייצוג גראפי:</u>



משוואות דיפרנציאליות חלקיות

בדיקת יציבות:

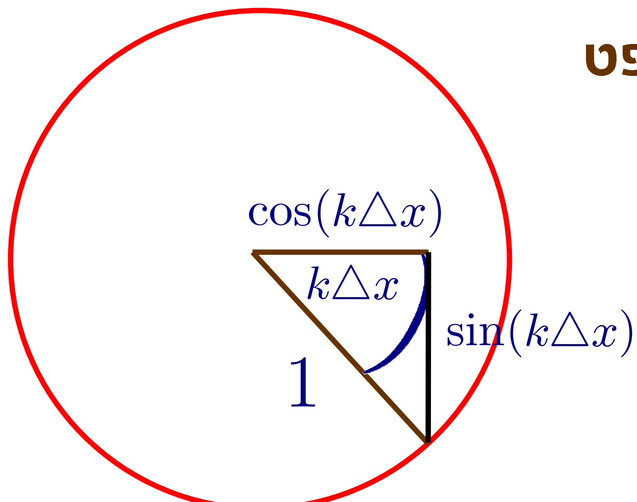
שוב מציבים: $$u_j^n = \xi^n e^{ikj\Delta x}$$

מקבלים: $$\xi = \frac{1}{2}\left(e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}\right) - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\left(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}\right)$$

ולכן: $$\xi = \cos k\Delta x - i\frac{v\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x$$

<u>במישור המרוכב:</u>

(משתמשים במשפט אוילר לגבי הקשר בין טריגונומטריה לבין מספרים מרוכבים)



$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

אז תנאי היציבות: $|\xi| \leq 1$

דורש ש- ξ יהיה בתוך המעגל.

מקבלים תנאי שלא תלוי ב- k:

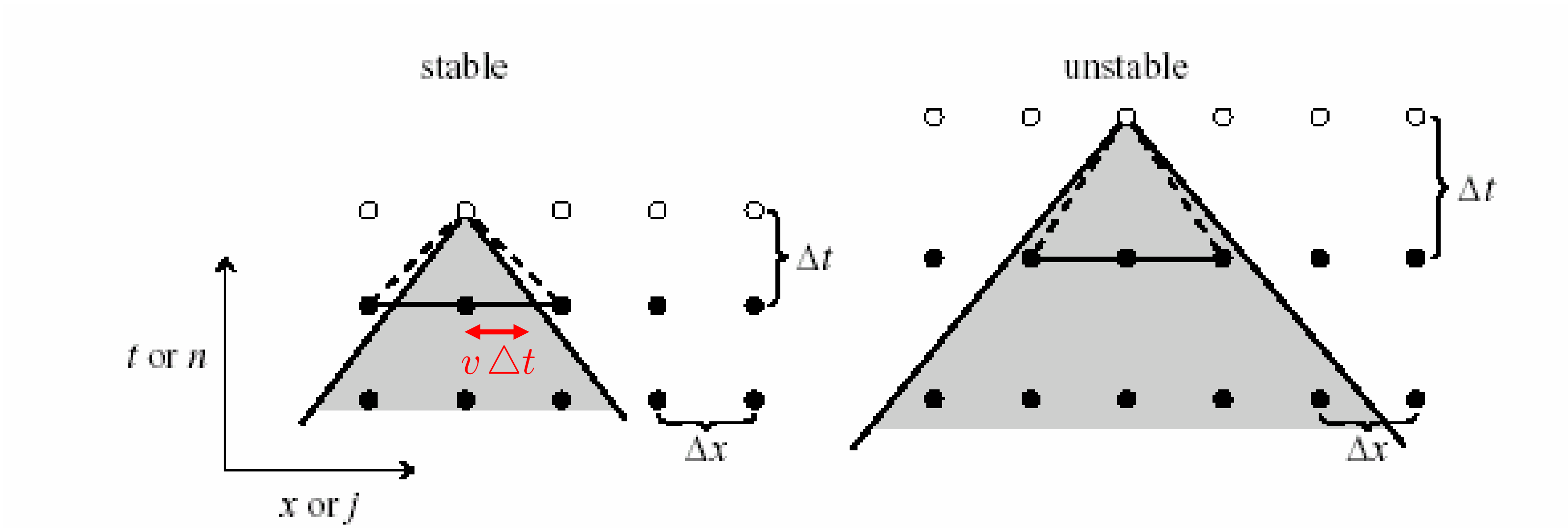
$$\frac{|v|\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

הוא נקרא תנאי קורנט .

(Courant)

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

הסבר אינטואיטיבי: פתרונות הגל נעים במהירות v. הערך u_j^{n+1} מושפע מנקודות u^n ממרחק עד $v\Delta t$. במשוואה המקורבת, אנחנו משתמשים בנקודות u^n עד מרחק Δx. אם $v\Delta t<\Delta x$, אז את כל המידע הדרוש ניתן להשיג באינטרפולציה. אם $v\Delta t>\Delta x$, אז השימוש באקסטרפולציה גורם לאי-יציבות.



משוואות דיפרנציאליות חלקיות

נשווה את שתי השיטות כאשר $v\Delta t<\Delta x$:

שיטת אוילר:

$$\xi(k) = 1 - i\frac{v\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x$$

שיטת לאקס:

$$\xi = \cos k\Delta x - i\frac{v\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x$$

יש לנו רזולוציה טובה לגלים ארוכים: $k\Delta x \ll 1$ (הערה: אורך גל = $2\pi/k$)
שתי השיטות נותנות פתרון מדויק במקרה זה: $|\xi| \simeq 1$
עם גלים קצרים, $k\Delta x \sim 1$ ומעל, אי אפשר לדייק (רעיון דומה לתדירות קריטית). כאן שיטת אוילר נותנת $|\xi| > 1$ וההתבדרות הורסת את הפתרון אפילו בבעיה שמתחילה עם גלים ארוכים, אבל שיטת לאקס נותנת $|\xi| < 1$ ואז גלים אלה נעלמים ולא מפריעים לפתרון הגלים הארוכים.

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

שיטה שלישית: שיטת הדילוג (leapfrog).
נגזרת סימטרית גם בזמן:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\triangle t} = -\, v\left(\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\triangle x}\right)$$

ולכן:

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = -\frac{v\Delta t}{\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)$$

בדיקת יציבות נותנת משוואה ריבועית ל- ξ, שניתן לפתור:

$$\xi = -i\frac{v\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x \pm \sqrt{1-\left(\frac{v\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x\right)^2}$$

לכן: $|\xi| = 1$ **עם תנאי Courant**

ואחרת אפשר לקבל $|\xi|$ גבוה כאשר $v\Delta t \gg \Delta x$.

ייצוג גראפי: