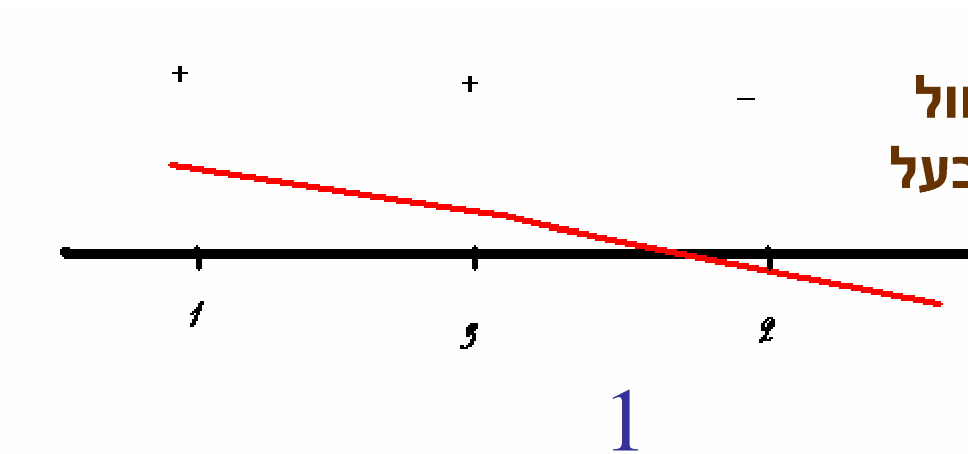
מציאת אפסים

שיטת החצייה (Bisection)

נתון אינטרוול שערכי הפונקציה בקצוות הם בעלי סימנים הפוכים. מוצאים את הפונקציה באמצע האינטרוול. האינטרוול החדש הוא בין נקודת האמצע והקצה בעל הסימן ההפוך.



גודל האינטרוול קטן פי 2 בכל צעד:
זה נקרא התכנסות "ליניארית".

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n$$

אם האינטרוול הראשון היה בגודל ε_0,
אז אחרי n צעדים:

$$\varepsilon = \varepsilon_0/2^n$$

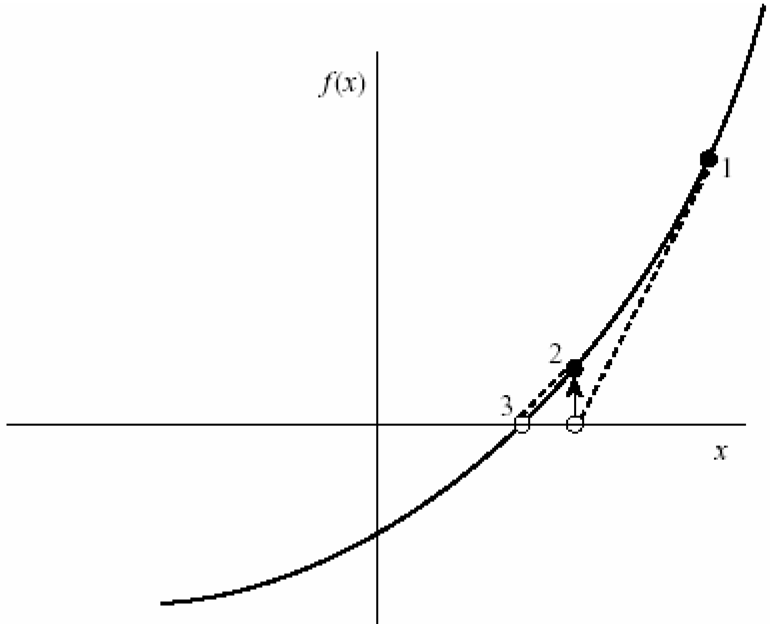
לכן, מספר הצעדים הנדרש לדיוק סופי ε:

$$n = \log_2 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$$

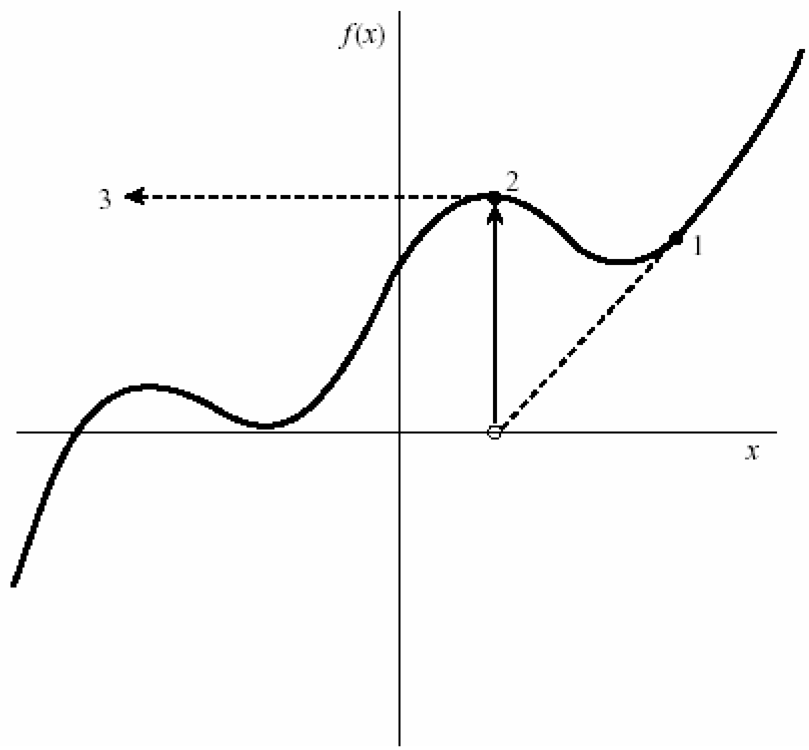
יתרון: השיטה עובדת תמיד (אם f רציפה).

שיטת ניוטון-רפסון
Newton-Raphson

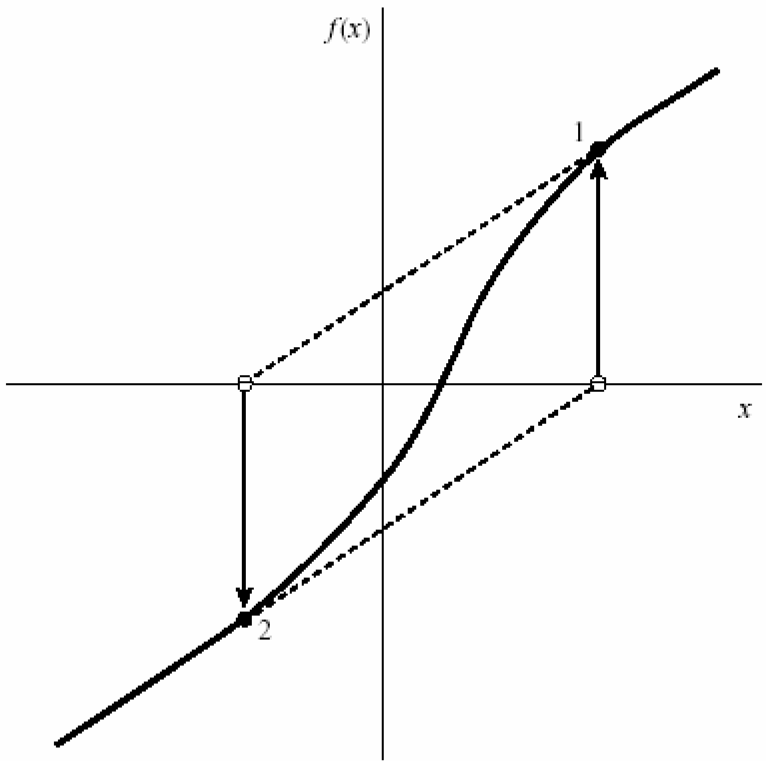
<u>הרעיון:</u> להמשיך את הפונקציה בקו ישר לפי הנגזרת, עד שמגיעים לציר f=0 :



בעיות: אם f’=0 אז נתקעים:



אפשר גם להיתקע במחזור אינסופי:



מציאת אפסים

תיאור מתמטי:

טור טיילור:

$$f(x+\delta) \approx f(x) + \delta\, f'(x)$$

מציאת האפס לפי שיטת N-R:

$$f(x+\delta) = 0 \quad \rightarrow \quad \delta = -f(x)/f'(x)$$

הערכת השגיאה:

נרשום טורים כלליים:

$$f(x+\epsilon) = f(x) + \epsilon f'(x) + \frac{1}{2}\epsilon^2 f''(x)$$

$$f'(x+\epsilon) = f'(x) + \epsilon f''(x)$$

עכשיו נניח ש- x הוא הפתרון [f(x)=0] והניחוש שלנו הוא:

$$x_n = x + \epsilon_n$$

אז לפי השיטה, הניחוש הבא הוא:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

מציאת אפסים

עכשיו מציבים בטורים:
(בעזרת f(x)=0)

$$f'(x_n) = f'(x)\left[1 + \epsilon_n \frac{f''(x)}{f'(x)}\right]$$

$$f(x_n) = \epsilon_n f'(x)\left[1 + \tfrac{1}{2}\epsilon_n \frac{f''}{f'}\right]$$

ולכן:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x + \epsilon_n - \epsilon_n \left(1 + \tfrac{1}{2}\epsilon_n \frac{f''}{f'} - \epsilon_n \frac{f''}{f'}\right) \\ &= x + \tfrac{1}{2}\epsilon_n^2 \frac{f''}{f'} \end{aligned}$$

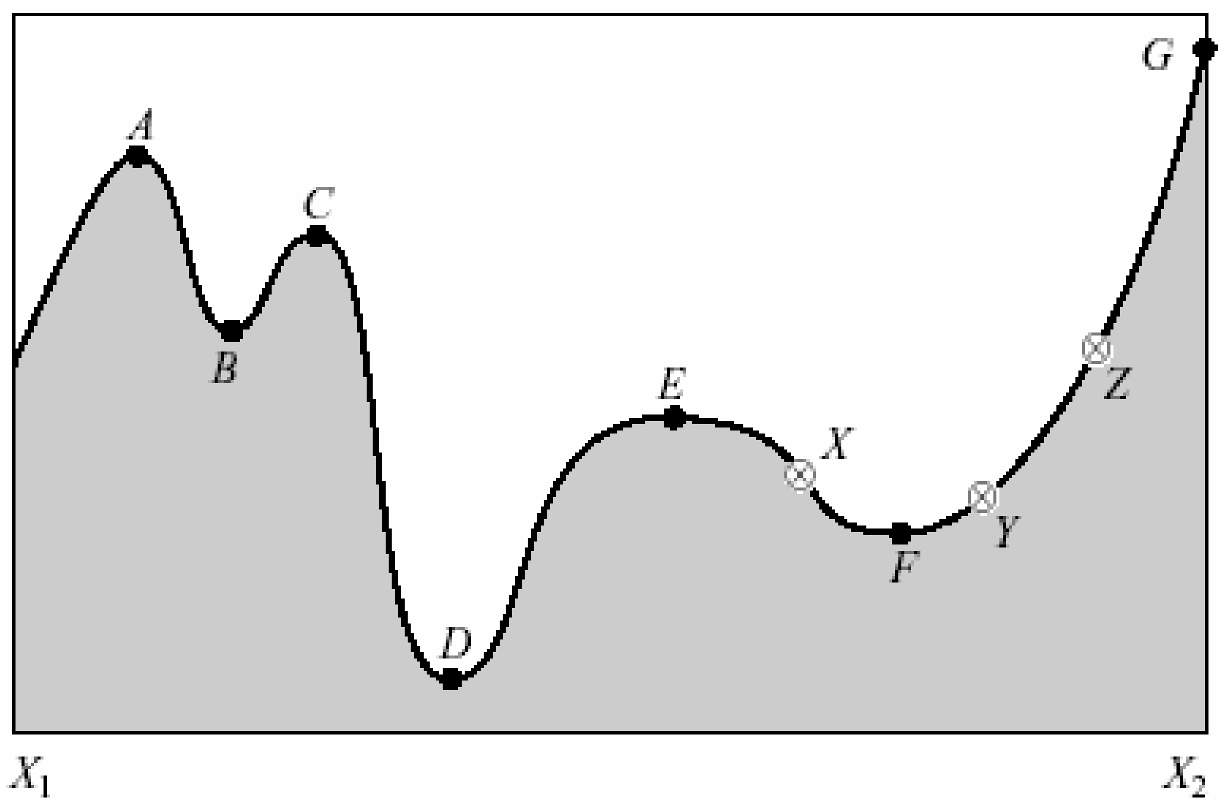
התוצאה היא התכנסות "ריבועית":
(שגיאת – במשוואה 9.4.6 בספר)

$$\epsilon_{n+1} = \tfrac{1}{2}\epsilon_n^2 \frac{f''(x)}{f'(x)}$$

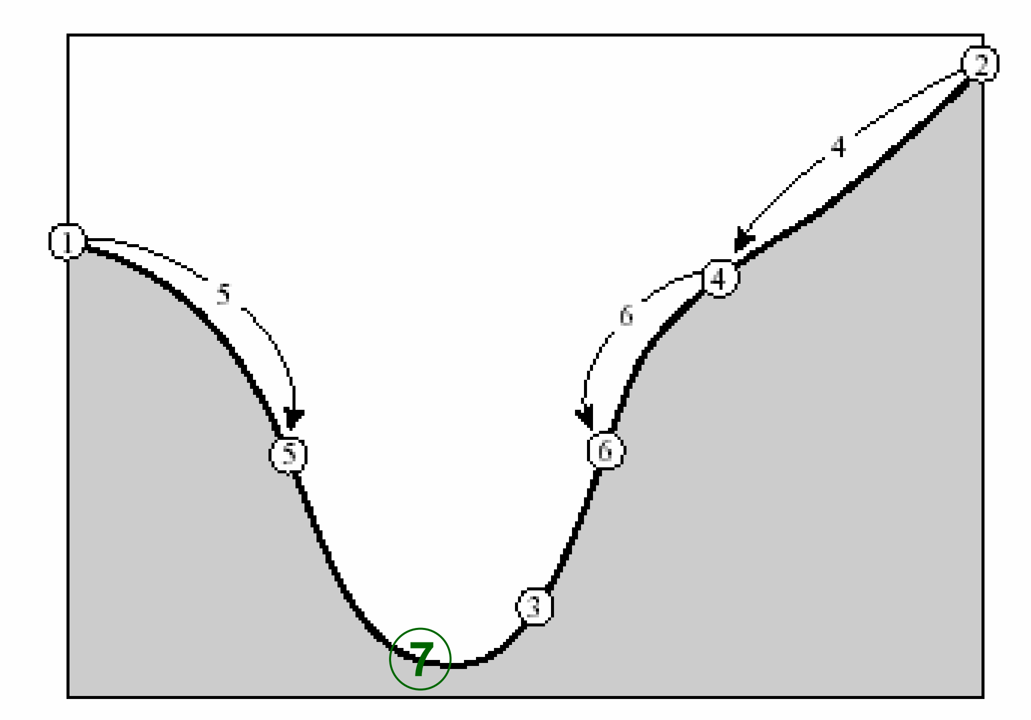
בעיות מינימום / מקסימום

$$\min(f) \longleftrightarrow \max(-f)$$

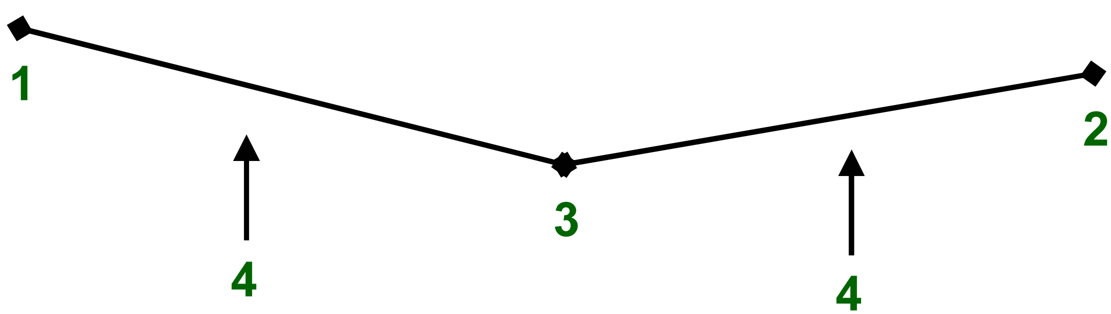
מינימום ומקסימום זה בעצם בעיה מאותו סוג:
עוד שם לבעיות מינימום: אופטימיזציה.
נתחיל במימד אחד.
יש מינימום מקומי (B, F, D) או גלובאלי (D), ומקסימום מקומי (A, C, E) או גלובאלי (G), בקצה האינטרוול במקרה זה.
שלש הנקודות X, Y, Z,
תוחמות מינימום:
f(Y) קטן גם מ- f(X)
וגם מ- f(Z), לכן יש
מינימום בין X ל- Z
(ו- Y הוא הניחוש).



שיטת חיתוך הזהב (Golden Section Search)

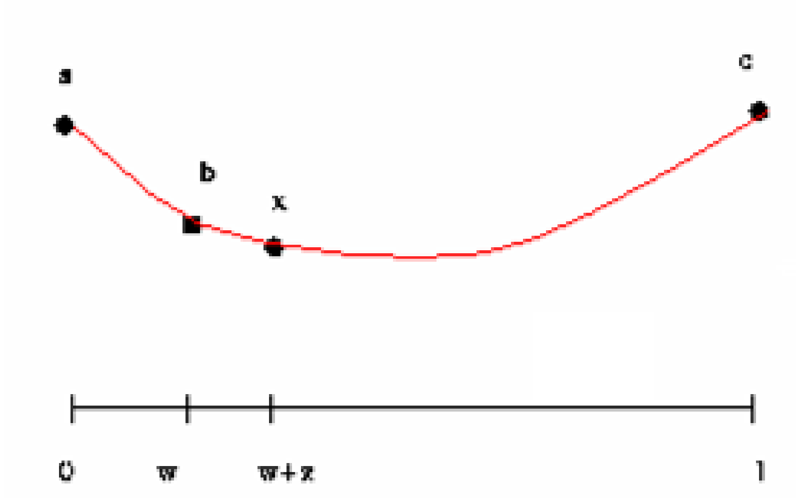


נניח שמתחילים מהנקודות 1,2,3. עכשיו מוצאים את f(4). עדיין נקודה 3 היא הניחוש הטוב ביותר, ו-4 מחליפה את 2. עכשיו נקודה 5: מחליפה את 1. עכשיו 6: מחליפה את 4. עכשיו 7: מחליפה את 3, ז"א הנקודות הן 5, 7, 3.



כיצד לחלק את האינטרוול? ננסה חצייה:
הנקודה הבאה (4) עלולה לתת אינטרוול מחולק בצורה לא שווה (יחס 2:1). אז אי אפשר להתמיד בשיטת החצייה .

מציאת מינימום



נניח שמתחילים מהנקודות a, b, c ,
עם אינטרוול מחולק ביחס w<1 :

$$\frac{b-a}{c-a} = w$$

נרצה לשמור על אותו היחס גם בצעד הבא. הנקודה הבאה x נמצאת ב- w+z . לפי f(x), האינטרוול הבא יהיה a, b, x , או b, x, c . אז נרצה שבכל מקרה החלוקה תהיה ביחס w:1 :

$$w = \frac{z}{1-w} \qquad w = \frac{z}{w+z}$$

ז"א: $1 - w = w + z$ שנותן: $z = 1 - 2w$

ואז: $w = \frac{1-2w}{1-w}$ שנותן: $w^2 - 3w + 1 = 0$

תשובה: נקרא יחס הזהב (golden section)

$$w = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.38197\ldots$$

מציאת מינימום

גודל האינטרוול החדש ביחס לקודם:

$$1 - w = w + z = 0.61803\ldots$$

ז"א התכנסות ליניארית:

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n \times 0.61803$$

הערה:

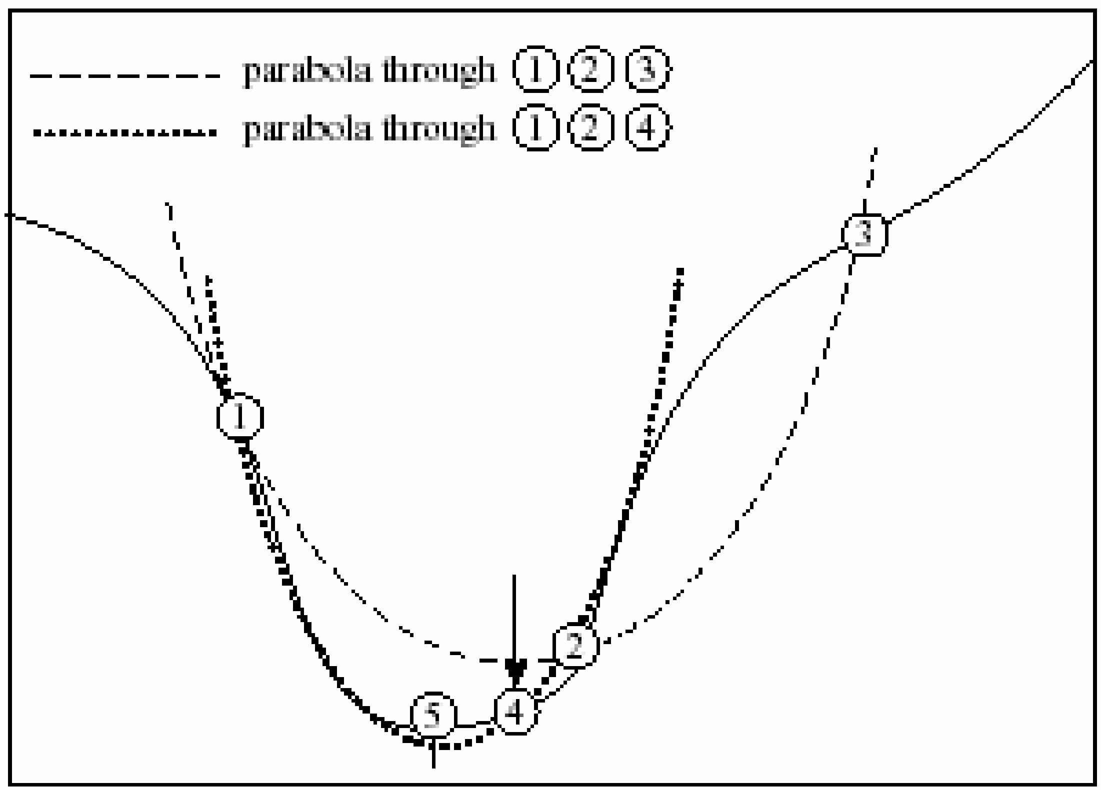
$$\frac{1}{0.61803} = 1.61803 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

יתרון: תמיד מתכנס בקצב:

$$\epsilon = \epsilon_0 \times (0.61803)^n$$

אם הפונקציה חלקה, עדיף להשתמש בשיטות מסדר גבוה.

שיטת Brent



נניח שמתחילים מהנקודות 1,2,3. מעבירים פרבולה דרך שלש הנקודות, לפי נוסחת לגרנג'. אז המינימום של הפרבולה (4) הוא הניחוש של המינימום של הפונקציה. הנקודות בצעד הבא: 1,4,2 , שנותנים את הניחוש 5.