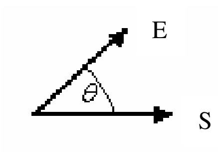
פיסיקה ב' לביולוגים- תרגול מס' 3

נוסחאות:

- **חוק גאוס**- נוסחא המאפשרת לחשב את גודל השדה E של מערכת מטענים בעלת סימטריה מוגדרת לפי שטף השדה דרך השטח של מעטפת S כאשר המעטפת חייבת לקיים את הסימטריה של מערכת המטענים בכדי שניתן באמת יהיה לחלץ את גודל השדה בנקודה כלשהי.
החוק אומר כי:
$$4\pi kq = \vec{E}\cdot\vec{S}$$
בנוסחא זו E הוא השדה החשמלי, S הוא שטח המעטפת, q הוא המטען הכלוא בתוך המעטפת בלבד ו-k הוא הקוע הרגיל מחוק קולון $k = 9\cdot 10^9$.
חוק גאוס למעשה מחשב אך ורק את השדה של המערכת הכלואה בתוך המעטפת מאחר וכל טפף של מטען חיצוני יתבטל.

- **מכפלה סקלרית**-אם נתונים 2 וקטורים שהזווית בינהם היא θ אזי המכפלה הסקלרית בינהם היא



$$\vec{E}\cdot\vec{S} = \left|\vec{E}\right|\times\left|S\right|\cos\theta$$

אם הזווית בין הוקטורים היא $\theta = 90^\circ$ אזי המכפלה הסקלרית היא 0.

תרגילים:

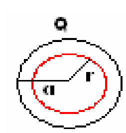
1) מהו השדה חשמלי של קליפה כדורית בעלת רדיוס a הטעונה במטען Q?

פתרון:

נפריד לשני מקרים – בתוך הקליפה ומחוצה לה.

i. <u>בתוך הקליפה:</u>

תוך הקליפה מוגדר כ- $r < a$ ומאחר ולמערכת כולה יש סימטריה כדורית נמעטפת שנבחר בתוך הקליפה תהיה מטפת כדורית בעלת רדיוס r כלשהו המקיים $r < a$ באופן המטען בתוך המעטפת הוא 0 ולכן לפי חוק גאוס

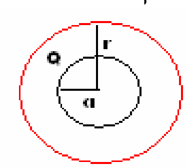


$$E\cdot S = 4\pi kq = 4\pi k\cdot 0 = 0$$

מאחר והמעטפת מקיימת את הסימטריה של המערכת אזי השדה בכל נקודה חייב להיות שווה 0 כלומר בתוך קליפה טעונה השדה הוא 0.

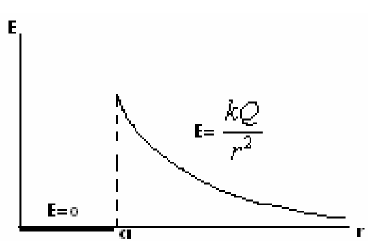
ii. <u>מחוץ לקליפה:</u>

חוץ הקליפה מוגדר כאזור בו $r \geq a$ ושוב מאחר ולמערכת יש סימטריה כדורית המעטפת שלנו תהיה מעטפת כדורית שהיא למעשה שטח פני כדור ברדיוס r המקיים $r \geq a$ באופן



השטח של המעטפת הוא $S = 4\pi r^2$ (שטח פני כדור)וכל השדה עובר דרך הקליפה (בגלל הסימטריה הכדורית) נקבל כי השטף דרך הקליפה הוא $\vec{E}\cdot\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2$.
המטען הכלוא בקליפה (שיוצר את שטף השדה) הוא Q ולכן לפי חוק גאוס:
$$E\cdot S = 4\pi kq \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = 4\pi kQ \Rightarrow E = \frac{kq}{r^2}$$
כיוון השדה הוא $\hat{r}$ בגלל הסימטריה הכדורית ולכן השדה מחוץ לקליפה כדורית הוא זהה לשדה של מטען נקודתי, הזהה בגודלו למטען הכולל של הקליפה וממוקם במרכז הקליפה

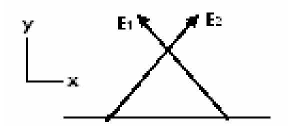
לסיכום השדה של קליפה כדורית הוא:
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{kQ}{r^2}\hat{r} & r \geq a \end{cases} \quad \frac{kQ}{r^2}$$



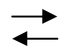
2) מהו השדה החשמלי של לוח אינסופי הטעון באופן אחיד במטען Q (צפיפות מטען σ)?

<u>**פתרון**</u>:

ניתן לראות שעבור לוח אינסופי לכל נקודה שנבחר מימינה ומשמאלה יהיו 2 נקודות זהות שיפעילו שדה כך שהשדה בציר המקביל ללוח יתבטל ואילו השדה בניצב ללוח לא יתבטל בצורה:

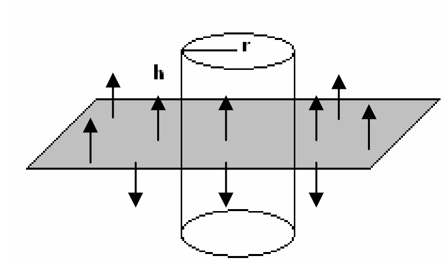


בציר Y השדה שיתקבל יהיה $E_Y = E_{1Y} + E_{2Y}$ לפי 

ואילו בציר X השדה יהיה $E_X = E_{1X} + E_{2X} = 0$ לפי  =0

לכן כיוון השדה יהיה אך ורק בכיוון המאונך ללוח.

נבחר מעטפת סימטרית משני צידי הלוח בצורה של גליל כאשר בסיסי הגליל מקבילים ללוח באופן



כאשר בסיס הגליל הוא כדור ברדיוס r וגובהו מעל הלוח הוא h.

כל שטף השדה יהיה אך ורק דרך הבסיסים ולא דרך דפנות הגליל מאחר וראינו כי קיים שדה אך ורק בכיוון המאונך ללוח ומאחר ושטח כל בסיס הוא $S_{\text{בסיס}} = \pi r^2$ השטח הכולל דרכו עובר השטף יהיה גדול פי 2 מאחר והשטף עובר דרך 2 הבסיסים ולכן $S = 2\pi r^2$.

המטען בקליפה הוא $q = \pi r^2 \cdot \sigma$ ולכן כשנציב בחוק גאוס נקבל:

$$E \cdot 2\pi r^2 = 4\pi k \cdot \pi r^2 \cdot \sigma \Rightarrow E = 2\pi k \sigma$$

וכפי שציינו כיוונו מאונך לכיוון המשטח.

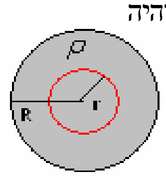
3) מהו השדה החשמלי של כדור לא מוליך טעון בעל רדיוס R וצפיפות מטען נפחית ρ קבועה?

<u>**פתרון**</u>:

המטען הכולל של הכדור שנסמנו ב-Q הוא $Q = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$.

בכדי להפעיל את חוק גאוס שוב נבחר מעטפת כדורית כי יש סימטריה כדורית ולכן השדה יהיה בכיוון $\hat{r}$ (כמו בשאלה 1).

כל עוד רדיוס המעטפת קטן מרדיוס הכדור - המטען הכלוא בתוך המעטפת, שרדיוסה r, יהיה:



$$q = \frac{4\pi r^3}{3}\rho = \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{R^3}{R^3}\rho = \frac{4\pi R^3}{3}\rho \cdot \frac{r^3}{R^3} = \frac{r^3}{R^3}Q$$

שטח המעטפת הוא $S = 4\pi r^2$ (שטח פני כדור) ולכן שנציב בחוק גאוס נקבל:

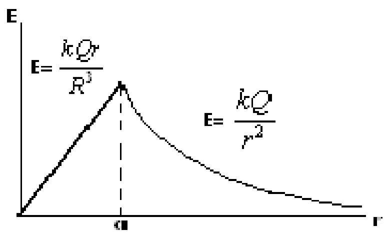
$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k q = 4\pi k \cdot \frac{4\pi r^3}{3}\rho = 4\pi k \cdot \frac{r^3}{R^3}Q \Rightarrow E = \frac{kQr}{R^3}$$ עבור $r \le R$

כאשר $r > R$ המטען שכלוא בתוך המעטפת קבוע ושווה ל-Q ולכן מחוק גאוס נקבל כי:

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k Q \Rightarrow E = \frac{kQ}{r^2}$$

ושוב קיבלנו כי מחוץ לקליפה השדה הוא כמו של מטען נקודתי Q הנמצא במרכז הכדור.

:לסיכום



$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{kQr}{R^3}\hat{r} & r\le R\\ \dfrac{kQ}{r^2}\hat{r} & r>R\end{cases}$$