

תרגיל מספר 5 – אינטגרציה ו-Mathematica

14 נובמבר 2004

הגשה עד: 21 נובמבר 2004 בשעה 07:00

ראה גם: <http://wise-obs.tau.ac.il/~barkana/nummethods.html>

בתרגיל זה אנו נשתמש בתוכנת Mathematica על מנת לחקור את התפשטות היקום.

1. על פי המודלים הקוסמולוגיים העדכניים ביותר, גיל היקום t נתון ע"י האינטגרל הבא:

$$t(a) = t_1 \int_0^a \left(\frac{\Omega}{x} + (1 - \Omega)x^2 \right)^{-1/2} dx$$

במשוואה זו, t_1 שווה ל-14 מיליארד שנה. a הוא פרמטר שנקרא מד האורך הקוסמולוגי (cosmological scale factor), והוא מסמן תקופות שונות בהיסטוריה של היקום. עפ"י הגדרה, $a=1$ היום, ו- $a=0$ בעת ה"מפץ הגדול". הגלקסיה הרחוקה ביותר שנתגלתה עד היום נראית לנו כפי שהייתה כאשר היה $a=1/7.6$. משמעות הדבר שהיקום התפשט פי 7.6 מאז ועד היום. הפרמטר Ω מייצג את צפיפות החומר הממוצעת ביקום כיום. היום יודעים ש- $\Omega=0.3$ בקירוב. עד לפני כ-10-5 שנים, חשבו ש- $\Omega=1$.

א. מצא את הנוסחא הפותרת את האינטגרל, בעזרת Mathematica. רצוי לבצע פעולת Simplify[] גם לפני וגם אחרי האינטגרציה. למרות זאת, Mathematica לא מסוגלת לפשט את התוצאה במלואה. עליך לנסות למצוא את הנוסחא הפשוטה ביותר. תמיד כדאי לבדוק את הנוסחא הסופית שקיבלת ע"י דיפרנציאציה.

ב. בנפרד, הצב את המקרה $\Omega=1$ ואז פתור את האינטגרל.

ג. מהו גיל היקום כיום? מה היה גיל היקום בעת שנוצרה הגלקסיה ב- $a=1/7.6$? שרטט את גיל היקום (במיליארדי שנה) עבור a בין 0 ל-1. בצע את כל סעיף זה בשני מקרים: $\Omega=1$ ו- $\Omega=0.3$.

2. המרחק בינינו לבין גלקסיה ב- a מסוים נתון ע"י האינטגרל הבא:

$$d(a) = d_1 \int_a^1 \left(\frac{\Omega}{x} + (1 - \Omega)x^2 \right)^{-1/2} \frac{dx}{x}$$

במשוואה זו, המרחק d_1 שווה ל-14 מיליארד שנות אור. למקרה הכללי $\Omega \neq 1$, אין נוסחא פשוטה, לכן נשתמש באינטגרציה נומרית.

א. הצב את המקרה $\Omega=1$ ופתור (אנליטית) את האינטגרל במקרה המיוחד הזה.

ב. כמה רחוקה מאיתנו הגלקסיה שנוצרה ב- $a=1/7.6$? שרטט את המרחק מאיתנו (במיליארדי

שנות אור) עבור a בין 0 ל-1. בצע את כל סעיף זה בשני מקרים: $\Omega=1$ ו- $\Omega=0.3$.

ג. בשביל גלקסיה ב- a מסוים, המרחק מאיתנו גדל במהירות v , כאשר:

$$v = \frac{d(a)}{d_1}$$

נותן את v ביחידות של מהירות האור. שרטט את המהירות עבור a בין 0 ל-1, בשני המקרים:

$\Omega=1$ ו- $\Omega=0.3$.

הערה: התפשטות יותר מהירה ממהירות האור היא מותרת כאשר מדובר במרחק קוסמולוגי (ולא בתנועה מקומית של עצם אחד ביחס לעצם אחר).