תרגיל מספר 12 – משוואות דיפרנציאליות חלקיות

בתרגיל זה נפתור את משוואת הגלים במימד אחד:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

אנחנו נבדוק את הפתרון הבא למשוואת הגלים:
$$u(x,t) = f(x - vt) + f(3 - x - vt)$$

כאשר נגדיר:
$$f(z) = e^{-z^2}$$
וגם:
$$v = 1$$

כפי שראינו בשיעור (או בספר, משוואה 19.1.3 וכולי), אפשר לכתוב את משוואת הגלים בצורה של מערכת משוואות מסדר ראשון:
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(A \cdot \vec{u})$$
בעזרת הוקטור והמטריצה:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -v \\ -v & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

כאשר הגדרנו:
$$r = v\frac{\partial u}{\partial x},\ s = \frac{\partial u}{\partial t}$$

בעזרת תוכנית C, פתור את המשוואות מסדר ראשון בעזרת סעיפים א ו-ב, כאשר אתה מתחיל בזמן t=0 עם הפתרון המדויק הנ״ל- u(x,t=0). מצא ושרטט את u(x,t) בכמה זמנים t שמראים את התפתחות הגל.

א. בשיעור דיברנו על שיטת הפתרון הבאה במקרה של משוואה אחת פשוטה:
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\triangle t} = -v\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\triangle x}\right)$$
תרגם את השיטה הזו למקרה של מערכת המשוואות הנ״ל, והשתמש בא על מנת למצוא את הפתרון.

ב. חזור על סעיף א׳ אבל במקרה זה נקודת המוצא היא שיטת הפתרון הבאה:
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{\triangle t} = -v\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\triangle x}\right)$$