פירוק LU

$$L \cdot U = A$$

מפרקים את A למכפלה של מטריצת משולש עליון (U) ותחתון (L).
ואז, בשביל כל B, פותרים את $A \cdot X = B$ בשני שלבים:

$$(L \cdot U) \cdot X = L \cdot (U \cdot X) = B$$

אז קודם נפתור את $L \cdot Y = B$ ונמצא את Y.
אח"כ נפתור את $U \cdot X = Y$ ונמצא את X.
מה היתרון בשני שלבים? כל שלב הוא קל לפתור:

שלב 1: $L \cdot Y = B$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

פירוק LU

$$\alpha_{11}\, y_1 = b_1$$

$$\alpha_{21}\, y_1 + \alpha_{22}\, y_2 = b_2$$

$$\alpha_{31}\, y_1 + \alpha_{32}\, y_2 + \alpha_{33}\, y_3 = b_3$$

פותרים לפי הסדר, מ- y_1 למעלה:

$$y_1 = b_1/\alpha_{11}$$

$$y_2 = \frac{1}{\alpha_{22}}(b_2 - \alpha_{21} y_1)$$

$$y_3 = \frac{1}{\alpha_{33}}\left[b_3 - \alpha_{31}\, y_1 - \alpha_{32}\, y_2\right]$$

פתרון כללי:

$$y_i = \frac{1}{\alpha_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} y_j\right]$$

שיטה זו נקראת פתרון ע"י הצבה קדימה

פירוק LU

פותרים בצורה דומה את שלב 2: $U \cdot X = Y$

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

פותרים לפי הסדר, הפעם מ- x_3 למטה:

$$x_3 = y_3/\beta_{33}$$

$$x_2 = \frac{1}{\beta_{22}}\left[y_2 - \beta_{23}\,x_3\right]$$

$$\vdots$$

פתרון כללי:

$$x_i = \frac{1}{\beta_{ii}}\left[y_i - \sum_{j=i+1}^{N} \beta_{ij} x_j\right]$$

שיטה זו נקראת פתרון ע"י הצבה אחורה

פירוק LU

על הפירוק LU עצמו נדלג (נמצא בספר). באופן כללי:
$L \cdot U = A$ נותן N^2 משוואות (אחת לכל איבר ב-A).
במטריצה, יש N איברים באלכסון, ו- N^2-N אחרים.
אז ב-L (ו-U), מספר האיברים הלא מאופסים הוא: $\frac{N^2-N}{2} + N$

<u>סה"כ:</u> N^2 משוואות, N^2+N נעלמים. לכן אפשר להוסיף N תנאים.
קובעים: $\alpha_{ii} = 1, \;\; i = 1, \ldots, N$

הפירוק עושה שימוש חלקי באיברי ציר (החלפת שורות), ז"א מקבלים
בעצם: $L \cdot U = A'$ כאשר A' היא A עם השורות בסדר שונה. אז
צריך להחליף את הסדר גם ב-B.

<u>דוגמא:</u> שלב 1:

$$y_1 = 1$$
$$0.0003 + y_2 = 2.0001$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.9998 \end{pmatrix}$$

פירוק LU

שלב 2:

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$2.9997\, x_2 = 1.9998$$
$$x_1 + \frac{2}{3} = 1$$

עוד שימושים של פירוק LU:

1) מציאת המטריצה ההופכית של A: כל עמודה בנפרד:

הקלט:

$$\begin{array}{ccc} b1 & b2 & b3 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ההרצה:

```
ludcmp(a,n,indx,&d);
lubksb(a,n,indx,b1);
lubksb(a,n,indx,b2);
lubksb(a,n,indx,b3);
```

הפלט: b3 b2 b1 הן עמודות התשובה.

פירוק LU

2) מציאת הדטרמיננטה של A:

יודעים ש- $L \cdot U = A'$ **ולכן:**

$$\det(A') = \det(L) \cdot \det(U) =$$

$$\alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn} \times \beta_{11}\beta_{22}\ldots\beta_{nn}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \beta_{jj}$$

כל חילוף שורות מכפיל את det A’ ב 1- , אז:

$$\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}') \cdot \mathrm{d}$$

פירוק הערכים הסינגולאריים (SVD – Singular Value Decomposition)

מפרקים את A (M משוואות, N נעלמים, $M \geq N$) למכפלה של שלש מטריצות:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & \mathrm{A} & \\ & & \end{pmatrix}_{M \times N} = \begin{pmatrix} & & \\ & \mathrm{U} & \\ & & \end{pmatrix}_{M \times N} \cdot \begin{pmatrix} & & \\ & \mathrm{W} & \\ & & \end{pmatrix}_{N \times N} \cdot \begin{pmatrix} & & \\ & \mathrm{V}^{\mathrm{T}} & \\ & & \end{pmatrix}_{N \times N}$$

כאשר: $V^T_{ij} = V_{ji}$

וכאשר: $w_j \geq 0$

$$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & w_2 & \\ 0 & & \ddots \; w_N \end{pmatrix}$$

ה- w_j נקראים הערכים הסינגולאריים של A. אפשר גם לכתוב:

$$W = \mathrm{diag}(w_j)$$

פירוק SVD

והמטריצות האחרות:

$$\underset{N \times M}{\begin{pmatrix} & \mathrm{U}^{\mathrm{T}} & \end{pmatrix}} \cdot \underset{M \times N}{\begin{pmatrix} & \mathrm{U} & \end{pmatrix}} = \underset{N \times N}{\begin{pmatrix} & \mathrm{V}^{\mathrm{T}} & \end{pmatrix}} \cdot \underset{N \times N}{\begin{pmatrix} & \mathrm{V} & \end{pmatrix}} = \mathrm{I}_N$$

וגם: $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}_N$, ז"א: $V^T = V^{-1}$

אז V היא מטריצה אורתוגונאלית

עכשיו נניח M=N:

גם U אורתוגונאלית, ואם:

$$A = U \cdot W \cdot V^T$$

אז:

$$A^{-1} = V \cdot W^{-1} \cdot U^T$$

קל לבדוק ע"י הכפלה ב- A, למשל:

$$AA^{-1} = U \cdot (W \cdot (V^T \cdot V) \cdot W^{-1}) \cdot U^T$$

פירוק SVD

כאשר (קל לבדוק ע"י הכפלה ב- W) : $W^{-1} = \mathrm{diag}(1/w_j)$

כאשר A סינגולארית, ז"א $\det(A) = 0$, לפחות אחד מה- w_j מתאפס. כל שיטה אחרת תיכשל במקרה זה. גם אם אחד מה- w_j מאד קטן (אבל לא אפס), יש בעיה: המשוואות כמעט סינגולאריות, ז"א אנחנו רגישים מאד לשגיאות עיגול. מה זה מספר קטן? בערך 1.e-6 (בשביל דיוק רגיל) או 1.e-12 (בשביל דיוק כפול), ביחס ל- w_j המקסימאלי.

אז מקבלים דיאגנוזה. מגדירים:

$$\text{condition number} = \frac{\max(w_j)}{\min(w_j)}$$

כאשר מספר גבוה זה רע.

כשיש פתרון, אז הוא:

$$X = A^{-1}B$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{V} \cdot [\mathrm{diag}(1/w_i)] \cdot (\mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{B})$$

פירוק SVD

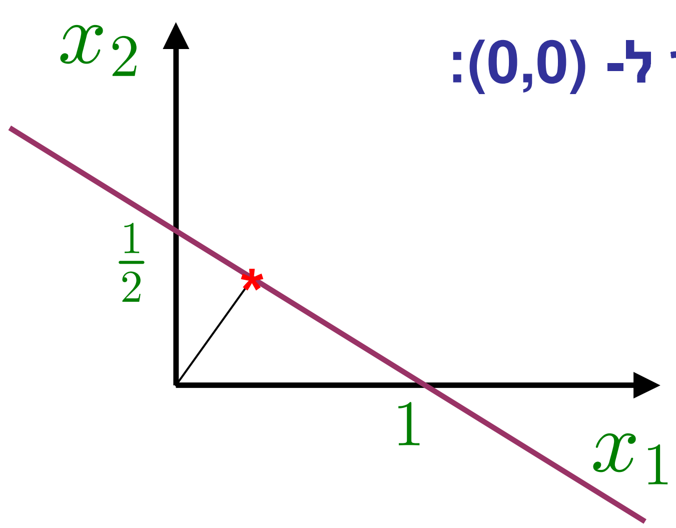
אבל נוסחא זו שימושית גם באופן כללי, אם כש- $w_j = 0$
נחליף את $1/w_j$ ב- 0 בנוסחא.
כשיש הרבה פתרונות, זה נותן את הפתרון X ל- $\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$
בעל אורך מינימאלי:

$$|X|^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2$$

למשל:

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

הפתרונות הם על קו ישר:
מקבלים את ה-X הקרוב ביותר ל- (0,0):
(מסומן ב- *), כי האורך של X
שווה למרחק בין X ל- (0,0).



פירוק SVD

כשאין אף פתרון ל- $\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$

אז X הוא הווקטור שעבורו השארית (residual) היא מינימאלית.

כאשר: $r = |\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} - \mathrm{B}|$

משפט זה נכון גם אם: $M > N$

בכל המקרים, כדאי להיפטר מ- w_j קטנים שרק מגבירים את הרגישות שלנו לשגיאות עיגול, בלי לתת לנו אינפורמציה משמעותית על X.

בכל w_i קטן שמים 0 במקום $1/\,w_i$ בנוסחא:

$$\mathrm{X} = \mathrm{V} \cdot [\mathrm{diag}(1/w_i)] \cdot (\mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{B})$$