משוואות ליניאריות

בעזרת מטריצות: $A \cdot X = B$

לא תמיד יש פתרון אחד. יש כמה אפשרויות:

1. מס' המשוואות M = מס' הנעלמים N
מצפים לפתרון אחד. ואם $\det A \neq 0$, אז הפתרון הוא: $x = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{B}$

2. N < M
מצפים לאינסוף פתרונות.

3. N > M
בד"כ אין פתרון (אילוץ יתר)

גם כש- M=N, יכולים להיות אינסוף פתרונות, למשל: $\begin{array}{l} x_1+2x_2=1 \\ 2x_1+4x_2=2 \end{array}$ (detA=4-4=0)

או אפס פתרונות, למשל: $\begin{array}{l} x_1+2x_2=1 \\ 2x_1+4x_2=1 \end{array}$

הפתרון מצריך הרבה פעולות <= צריך להיזהר משגיאות עיגול, כפי שנראה.

אלימינצית גאוס-ג'ורדן

רעיון: מתחילים מ- $A \cdot X = B$

עושים סדרת פעולות על A ועל B, כך שהפתרון X לא משתנה. לאט לאט, משנים את A עד שמקבלים את מטריצת היחידה I. באותו זמן, הפעולות שינו את B ל- B' :

$$I \cdot X = B' \Leftarrow X = B'$$

<u>הפעולות המותרות:</u>

א. החלפת שורות ב-A וב-B (שינוי סדר המשוואות).

למשל:

$$\begin{array}{c} 3x_1+2x_2=1 \\ x_1+5x_2=3 \end{array} \Leftarrow \begin{array}{c} x_1+5x_2=3 \\ 3x_1+2x_2=1 \end{array}$$

ב. לשורה אחת: הוספת קומבינציה ליניארית של שורות (אותה פעולה ב-A וב-B). הערה: מותר להכפיל שורה במספר (אך לא ב-0).

למשל, לשורה 1: הוספת חצי שורה 1 + פעמיים שורה 2 :

$$\begin{array}{c} 3x_1+2x_2=1 \\ x_1+5x_2=3 \end{array} \Leftarrow \begin{array}{c} 6.5x_1+13x_2=7.5 \\ x_1+5x_2=3 \end{array}$$

אלימינצית גאוס-ג'ורדן

ג. החלפת שתי עמודות ב-A, ובמקרה זה: גם סדר המשתנים.
למשל:

$$\begin{matrix} 3x_1+2x_2=1 \\ x_1+5x_2=3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x_2+3x_1=1 \\ 5x_2+x_1=3 \end{matrix}$$

<u>שיטה 1:</u> "אלימינציה ללא שימוש באיברי ציר": משתמשים רק בפעולה ב.
דוגמא: נמצא מטריצה הופכית:

$$[A\,|\,I] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right] \rightarrow [I\,|\,A^{-1}]$$

שורה 1 x 1/2 (בשביל לקבל $A_{11}=1$).
שורה 2: פחות x2 שורה 1 (בשביל $A_{21}=0$).
שורה 2: חלקי 4- (בשביל $A_{22}=1$).
שורה 1: פחות x3/2 שורה 2 (בשביל $A_{12}=0$).
(בסוף: אפשר לבדוק את הפתרון)

אלימינצית גאוס-ג'ורדן

אבל שיטה זו לא מתמודדת טוב עם שגיאות עיגול. דוגמא:

$$0.0003x_1 + 3.0000x_2 = 2.0001$$
$$1.0000x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.0003 & 3 & 2.0001 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10000 & 6667 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(שורה 1)\0.0003

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10000 & 6667 \\ 0 & -9999 & -6666 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10000 & 6667 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(שורה 2 - שורה 1) **(שורה 2)\(-9999)** $x_2 = \frac{2}{3}$

(שורה 1 – (שורה 2)x10000):

$$x_1 = 6667 - 10000 \times \frac{2}{3}$$
$$= 6667 - 6666.66666 = \frac{1}{3}$$

אלימינצית גאוס-ג'ורדן

מסקנה: החילוק במקדם קטן (0.0003) גרם להופעת מקדמים גדולים, ולדיוק נמוך ב-x_1.

ניסיון שיפור:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.0003 & 3 & 2.0001 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.0003 & 3 & 2.0001 \end{pmatrix}$$

חילוף שורות (פעולה א)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2.9997 & 1.9998 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ממשיכים כמו קודם (עם פעולה ב)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

באופן כללי: נמנעים מחילוק במקדמים קטנים.

אלימינצית גאוס-ג'ורדן

<u>רעיון כללי:</u>

בכל שלב באלימינציה, צריך לחלק במקדם בשביל לקבל 1.

למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}$$

האיבר במקום a'_{22} הוא איבר הציר (pivot) בשלב זה. במקום לחלק בו ישר, קודם מחליפים שורות (פעולה א) או עמודות (פעולה ג) בשביל להחליף אותו במקדם הכי גדול בערך מוחלט. לא משנים את העמודות שאיתן כבר סיימנו (בדוגמא זו: עמודה 1).

<u>שיטה 2 ו-3:</u> "אלימינציה תוך שימוש באיברי ציר": שימוש חלקי (פעולה ב + א) או מלא (ב + א + ג). תזכורת: במקרה המלא, השתנה סדר המשתנים.

דוגמא עם שימוש מלא:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad \overset{A}{\longleftrightarrow} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -13 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

אלימינצית גאוס-ג'ורדן

א, ג $\Rightarrow \begin{pmatrix} -13 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

החלפנו ב-A את עמודות 1 ו- 2 ואת שורות 1 ו- 2 (החלפת השורות: גם בשלשת ווקטורי התוצאות B). זאת בשביל להביא את המספר הגדול (-13) למקום של איבר הציר בשלב זה, A_{11}.

כמו קודם (ב) $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/13 & 1/13 & 0 & -1/13 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ב $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/13 & 1/13 & 0 & -1/13 & 0 \\ 0 & 1/13 & 9/13 & 1 & 4/13 & 0 \\ 0 & 6/13 & 67/13 & 0 & -2/13 & 1 \end{pmatrix}$

אלימינצית גאוס-ג'ורדן

$$\underset{\text{א, ג}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1/13 & 3/13 & 0 & -1/13 & 0 \\ 0 & 67/13 & 6/13 & 0 & -2/13 & 1 \\ 0 & 9/13 & 1/13 & 1 & 4/13 & 0 \end{pmatrix}$$

עכשיו החלפנו ב-A את עמודות 2 ו- 3 ואת שורות 2 ו- 3, בשביל להביא את המספר הגדול (67/13) למקום של איבר הציר בשלב זה, A_{22}.

$$\underset{\text{ב}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1/13 & 3/13 & 0 & -1/13 & 0 \\ 0 & 1 & 6/67 & 0 & -2/67 & 13/67 \\ 0 & 9/13 & 1/13 & 1 & 4/13 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{ב}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15/67 & 0 & -5/67 & -1/67 \\ 0 & 1 & 6/67 & 0 & -2/67 & 13/67 \\ 0 & 0 & 1/67 & 1 & 22/67 & -9/67 \end{pmatrix}$$

אלימינצית גאוס-ג'ורדן

$$\underset{\text{ב}}{\Rightarrow}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 15/67 & 0 & -5/67 & -1/67 \\ 0 & 1 & 6/67 & 0 & -2/67 & 13/67 \\ 0 & 0 & 1 & 67 & 22 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{ב}}{\Rightarrow}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -15 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 67 & 22 & -9 \end{pmatrix}$$

בגלל החלפות עמודות ב-A, שינינו את סדר המשתנים. בכל עמודת תוצאה, החלפנו את x_1 ו- x_2, ואז את x_2 ו- x_3 . אז בשביל לקבל את התשובה בסדר המקורי (x_1, x_2, ו- x_3), מבצעים את אותן החלפות אבל בסדר הפוך. זה אומר שבעמודות התוצאה (שלש העמודות מימין), מחליפים את שורות 2 ו-3, ואז את שורות 1 ו-2.

אלימינצית גאוס-ג'ורדן

הפתרון:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 67 & 22 & -9 \\ -15 & -5 & 2 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

שיטה יותר טובה: פירוק LU

- מהירה פי 3 (אם לא צריך את A^{-1}).
- מפרקים את A פעם אחת, ואז השיטה מהירה ומדויקת לכמה B שרוצים.

$$L \cdot U = A$$

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad \mathrm{U} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{pmatrix}$$

מטריצת משולש תחתון   **מטריצת משולש עליון**