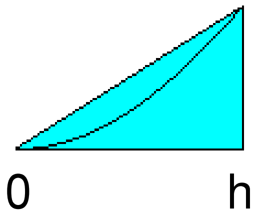
שיטת הטרפז: חזרה



נניח פונקציה ליניארית
(או הקירוב הליניארי לכל
פונקציה, לפי טור טיילור)

$$f(x) = f_0 + x f_0'$$

האינטגרל המדויק:

$$I = \int_0^h f(x)dx = f_0 h + \tfrac{1}{2} h^2 f_0'$$

שיטת המלבן (ניסיון 1):
[לפי הפונקציה בקצה השמאלי]

$$I_1 = f_0 h$$

את סדר הגודל של השגיאה מחשבים מהשוואה עם I:

$$O(h^2 f')$$

שיטת המלבן (2):
[לפי הפונקציה בקצה הימני]

$$I_2 = f(h)h = f_0 h + h^2 f_0'$$

סדר הגודל של השגיאה:

$$O(h^2 f')$$

שיטת המלבן הממוצע (3):
[לפי הפונקציה באמצע האינטרוול]

$$I_3 = f(h/2)h = f_0 h + \tfrac{1}{2} h^2 f_0'$$

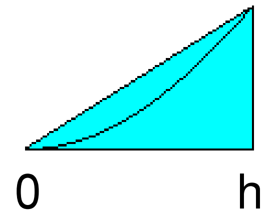
שיטת הטרפז (4):
[לפי ממוצע של הפונקציה בקצוות]

$$I_4 = \tfrac{1}{2}[f(0) + f(h)]h = \tfrac{1}{2}[f_0 + (f_0 + h f_0')]$$
$$= f_0 h + \tfrac{1}{2} h^2 f_0'$$

שיטת הטרפז: חזרה

הולכים לסדר הבא ב-h, לפי טור טיילור:

$$f(x) = f_0 + xf_0' + \tfrac{1}{2}x^2 f_0''$$



האינטגרל המדויק:

$$I = \int_0^h f(x)dx = f_0 h + \tfrac{1}{2}h^2 f_0' + \tfrac{1}{6}h^3 f_0''$$

אין שינוי בשגיאה של שיטות המלבן 1 ו-2, כי בהן כבר הסדר הקודם

נתן לנו את האיבר הדומיננטי של השגיאה: $O(h^2 f')$

שיטת המלבן הממוצע (3): $I_3 = f(h/2)h = f_0 h + \tfrac{1}{2}h^2 f_0' + \tfrac{1}{8}h^3 f_0''$

את סדר הגודל של השגיאה מחשבים מהשוואה עם I: $O(h^3 f'')$

שיטת הטרפז (4):

$$I_4 = \tfrac{1}{2}[f(0) + f(h)]h = \tfrac{1}{2}[f_0 + (f_0 + hf_0' + \tfrac{1}{2}h^2 f_0'')]$$

$$= f_0 h + \tfrac{1}{2}h^2 f_0' + \tfrac{1}{4}h^3 f_0''$$

השגיאה: $O(h^3 f'')$

השגיאה בשיטת הטרפז ב-N קטעים: (את קצב ההתכנסות תראו גם בתרגיל)

$$O(Nh^3 f'') = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

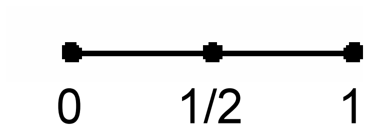
השגיאה בשיטת סימפסון המורחבת (לפי השיעור הקודם): $O\left(\frac{1}{N^4}\right)$

נוסחת אוילר-מקלורין: דוגמא

נחשב את האינטגרל: $I = \int_0^1 e^x dx$

האינטגרל המדויק: $I = e^x \Big|_0^1 = e - 1 = 1.71828$

ועכשיו לפי נוסחת Eul-Mac: ניקח N=2, אז h=1/2.



מתחילים עם הסכום משיטת הטרפז:

$$S = h\left[\tfrac{1}{2}f(0) + f(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}f(1)\right] = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2} + e^{1/2} + \tfrac{1}{2}e\right] = 1.75393$$

השגיאה: $|S - I| = 0.03565$

עכשיו מוסיפים ל-S איבר לפי נוסחת Eul-Mac (הערה: אנחנו לא משנים כאן את h, אלא מתכנסים לכיוון I בעזרת הנוסחא):

$$S_1 = S - \frac{1}{2}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2(e-1) = S - 0.03580 = 1.71813$$

שימו לב: השגיאה אכן הייתה קטנה מפעמיים האיבר הבא:

$|S - I| < 2|S_1 - S|$ ז"א: $0.03565 < 2(0.03580)$

נוסחת אוילר-מקלורין: דוגמא

השגיאה החדשה:

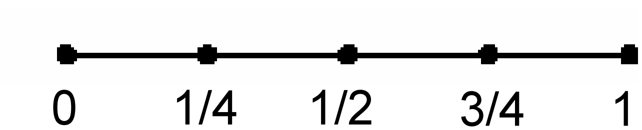
$$|S_1 - I| = 1.48 \times 10^{-4}$$

האיבר הבא בנוסחא (k=2):

$$-\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{30}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4(e-1) = 1.49 \times 10^{-4}$$

אז השגיאה עכשיו תהיה הרבה יותר קטנה, בערך 1.e-6 .

ועכשיו נתחיל שוב חישוב לפי נוסחת Eul-Mac, אבל ניקח N=4, אז h=1/4.



מתחילים עם הסכום משיטת הטרפז:

$$\tilde{S} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + e^{1/4} + e^{1/2} + e^{3/4} + \frac{1}{2}e\right] = 1.72722$$

השגיאה:

$$|\tilde{S} - I| = 0.00894$$

השגיאה קטנה בערך ברבע,
כשמשתמשים ב-h קטן פי שניים:

$$0.00894/0.03565 = 0.251$$

זה לא מפתיע: לפי נוסחת Eul-Mac, השגיאה ב-S היא שווה לאיבר הבא
(פלוס תיקונים קטנים מהאיברים הנוספים), ז"א $O(h^2)$.

נוסחת אוילר-מקלורין: דוגמא

נוסיף איבר לפי נוסחת Eul-Mac:

$$\tilde{S}_1 = \tilde{S} - \frac{1}{2}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^2(e-1) = 1.71827$$

השגיאה החדשה:

$$|\tilde{S}_1 - I| = 9.3 \times 10^{-6}$$

השגיאה קטנה בערך ב- 1/16, כשמשתמשים ב-h קטן פי שניים:

$$9.3 \times 10^{-6}/1.48 \times 10^{-4} = 0.0628$$

זה לא מפתיע: לפי נוסחת Eul-Mac, השגיאה ב-S_1 היא שווה לאיבר הבא (פלוס תיקונים קטנים מהאיברים הנוספים), ז"א $O(h^4)$.

<u>מסקנה:</u> שיטת הטרפז המורחבת מתכנסת כמו $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$. אם נוסיף רק איבר אחד של Eul-Mac, נתכנס כמו $O\left(\frac{1}{N^4}\right)$. שני איברים יתנו $O\left(\frac{1}{N^6}\right)$.

אבל יש בעיה: באופן כללי, אנחנו לא יודעים לחשב את הנגזרות של f.

נוסחת אוילר-מקלורין: שיטת סימפסון

פתרון: משתמשים רק בסכומים S של שיטת הטרפז המורחבת.
הרי, אנחנו מכפילים את N בשניים (ואת h בחצי) בכל צעד. אז במקום לקחת את S_h האחרון שחישבנו, בתור ההערכה שלנו לאינטגרל, משתמשים גם בסכומים שקיבלנו בצעדים הקודמים.

למשל, נגיד שחישבנו את S_h. אז בצעד הקודם חישבנו את S_{2h}. עכשיו, נוסחת Eul-Mac אומרת ש-

משוואה 1: $$I = S_h - \tfrac{1}{2} B_2 h^2 (f'_N - f'_1) + O(h^4)$$

משוואה 2: $$I = S_{2h} - \tfrac{1}{2} B_2 (2\,h)^2 (f'_N - f'_1) + O(h^4)$$

ניקח סכום משוקלל, 4/3 כפול משוואה 1 פחות 1/3 משוואה 2 (נראה עוד מעט מאיפה הגיע השקלול של 4/3 ו- 1/3) :

$$\tfrac{4}{3} I - \tfrac{1}{3} I = \tfrac{4}{3}\left[S_h - \tfrac{1}{2} B_2 h^2 (f'_N - f'_1) + O(h^4)\right]$$
$$- \tfrac{1}{3}\left[S_{2h} - \tfrac{1}{2} B_2 (2\,h)^2 (f'_N - f'_1) + O(h^4)\right]$$

נוסחת אוילר-מקלורין: שיטת סימפסון

לכן מקבלים:

$$I = \frac{4}{3}S_h - \frac{1}{3}S_{2h} + O(h^4)$$

אז אם כל פעם נשתמש בתוצאות של שני צעדים עוקבים של שיטת הטרפז,
ואם במקום S_h ניקח בתור התוצאה את:

$$S = \frac{4}{3}S_h - \frac{1}{3}S_{2h}$$

אז השגיאה תתכנס כמו:

$$O\left(\frac{1}{N^4}\right)$$

מסתבר שזה נותן בדיוק את שיטת סימפסון המורחבת.

עכשיו, כהכנה להמשך, נכתוב את מה שעשינו בצורה קצת שונה.

נוסחת אוילר-מקלורין כולל איבר תיקון ראשון:

$$S = I + ax$$

כאשר הגדרנו:

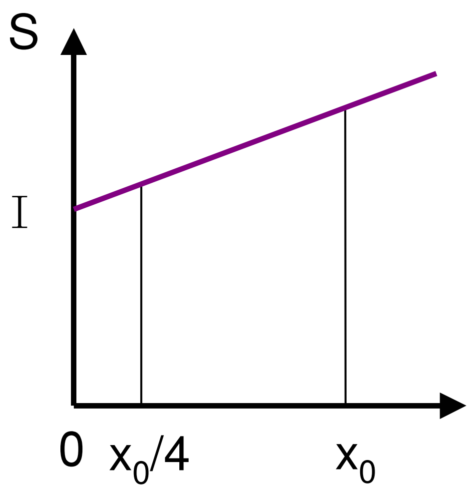
$$x = h^2$$

במשוואה זו, I הוא האינטגרל הרצוי והלא ידוע. בשביל כל x (ז"א בחירה של h), אנחנו יודעים לחשב את S (שהוא הסכום של שיטת הטרפז המורחבת).

נוסחת אוילר-מקלורין: שיטת סימפסון

נחשוב על S כפונקציה של x. הפונקציה היא פשוט קו ישר (יש תלות בחזקה ראשונה של x ולא באף חזקה גבוהה יותר). נניח שחישבנו שני שלבים עוקבים בשיטת הטרפז, $S(x_0)$ [ז"א S_h, כאשר $x_0=h^2$ עבור h מסוים] ו- $S(x_0/4)$ [ז"א $S_{h/2}$]. אנחנו רוצים למצוא את $S(x=0)=\mathrm{I}$.

מבחינה מתמטית, יש לנו קו ישר $S(x)$ שעובר דרך שתי נקודות. נבצע אקסטרפולציה ליניארית לנקודה $x=0$.



הנוסחא לאקסטרפולציה (או אינטרפולציה) ליניארית: (לקוחה מהפרק שלמדנו על אינטרפולציה)

$$S(x) = S\left(\frac{x_0}{4}\right) + \left[S(x_0) - S\left(\frac{x_0}{4}\right)\right] \frac{x-\frac{x_0}{4}}{x_0-\frac{x_0}{4}}$$

ולכן:

$$S(0) = S\left(\frac{x_0}{4}\right) + \left[S(x_0) - S\left(\frac{x_0}{4}\right)\right]\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}S\left(\frac{x_0}{4}\right) - \frac{1}{3}S(x_0)$$

וכך הוכחנו את המקדמים של שיטת סימפסון

נוסחת אוילר-מקלורין: שיטת רומברג

עכשיו הכללה:

נוסחת אוילר-מקלורין כולל k איברי תיקון, נותנת פולינום עם k איברים:

$$S = I + \sum_{j=1}^{k-1} a_j x^j$$

מחישוב של k שלבים עוקבים בשיטת הטרפז המורחבת, אנחנו יודעים את:

$$S(x_0),\ S(\tfrac{x_0}{4}),\ \ldots,\ S(\tfrac{x_0}{4^{k-1}})$$

עכשיו מוצאים את הפולינום S(x) מדרגה k-1 שעובר דרך k הנקודות הללו,
ואז מוצאים את I=S(0) .

השגיאה היא מסדר גודל האיבר הבא שהזנחנו בנוסחת אוילר-מקלורין:

$$O(x^k) = O(h^{2k}) = O\left(\frac{1}{N^{2k}}\right)$$