משוואות דיפרנציאליות רגילות

מערכת משוואות מסדר גבוה אפשר לכתוב כמערכת משוואות מסדר ראשון.
פשוט נותנים לנגזרות שם חדש. למשל:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} = r(x)$$

אז נגדיר את z:

$$\frac{dy}{dx} = z(x) \qquad \frac{dz}{dx} = r(x) - q(x)z(x)$$

עוד דוגמא:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x + y + \frac{d^2y}{dx^2}$$

הופך ל:

$$\frac{dy}{dx} = z \qquad \frac{dz}{dx} = w \qquad \frac{dw}{dx} = x + y + w$$

לכן, המבנה הכללי של מערכת משוואות הוא:

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_N), \qquad i = 1, \ldots, N$$

משוואות דיפרנציאליות רגילות

בשביל לפתור, צריך תנאי שפה (ז"א את ערכי ה- y_i). נניח את המקרה הפשוט של תנאי התחלה.

נעשה צעד אחד: $x_n \longrightarrow x_{n+1} = x_n + h$

יש שתי שאלות: 1) איזה h לבחור, 2) איך לקדם את ה- y_i. נתחיל עם 2.

שיטת אוילר

המשוואה: $$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

הצעד לפי אוילר: $$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y_n)$$

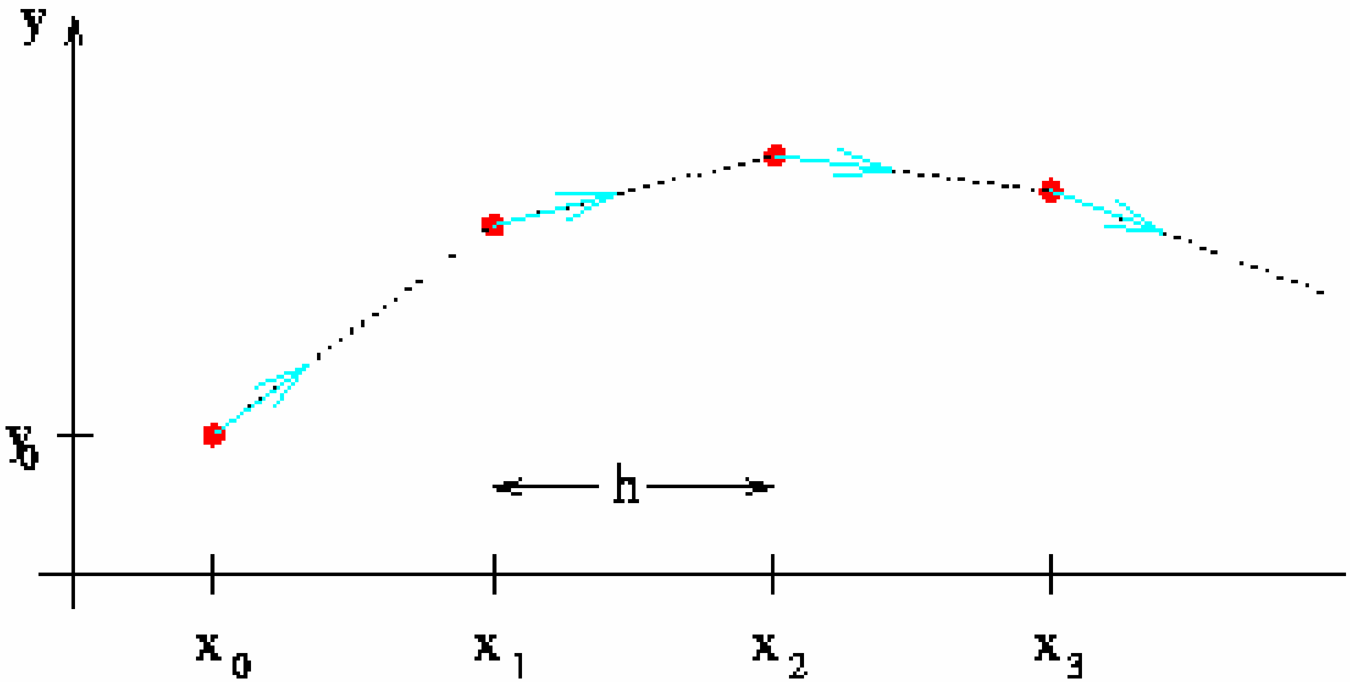
הצדקה לפי טור טיילור ביחס ל- $x=x_n$:

$$y\left(x_{n+1}\right) = y\left(x_n\right) + h\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_n} + O(h^2)$$

$$= y(x_n) + hf(x_n, y_n) + O(h^2)$$

משוואות דיפרנציאליות רגילות

בשיטת אוילר, מתקדמים לפי הנגזרת בתחילת הצעד (ז"א ב- x_n).
למשל, 4 צעדים:



זו שיטה מסדר ראשון (עם שגיאה מסדר שני), $O(h^2)$.

משוואות דיפרנציאליות רגילות

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$ **שיטת Runge-Kutta מסדר שני לפתרון המשוואה**

$$\kappa_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$\kappa_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}\kappa_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \kappa_2 + O(h^3)$$

<u>הצדקה:</u> מחשבים את השינוי ב- f. נגדיר:

$$x = x_n + \triangle x \qquad y = y_n + \triangle y$$

f היא פונקציה של שני משתנים, ומשתנה כך:

$$f(x, y) \approx f(x_n, y_n) + \partial_x f \, \triangle x + \partial_y f \, \triangle y$$

כאשר הנגזרות הן ב- (x_n, y_n) .

משוואות דיפרנציאליות רגילות

עכשיו, אנחנו לא משנים את x ואת y בנפרד, אלא ביחס הזה:

$$\triangle y \approx f(x_n, y_n)\triangle x$$

לכן מקבלים קירוב למשוואה:

$$\frac{dy}{dx} \approx f(x_n, y_n) + \triangle x\, \partial_x f + \triangle x\, f\, \partial_y f$$

ואת זה קל לפתור:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x=x_n}^{x_n+h} \frac{dy}{dx}\, dx = \int_{\triangle x=0}^{h} \frac{dy}{dx}\, d(\triangle x)$$

עכשיו,

$$\int_{\triangle x=0}^{h} \triangle x\, d(\triangle x) = \frac{1}{2} h^2$$

ולכן מקבלים:

$$h f(x_n, y_n) + \frac{1}{2} h^2 (\partial_x f + f \partial_y f)$$

עכשיו נבדוק שנוסחת Runge-Kutta מסדר שני אכן נותנת את זה:

$$\kappa_2 \approx h\left[f(x_n, y_n) + \tfrac{1}{2}h\,\partial_x f + \tfrac{1}{2}\kappa_1\,\partial_y f\right]$$

$$= hf + \tfrac{1}{2}h^2(\partial_x f + f\partial_y f)$$

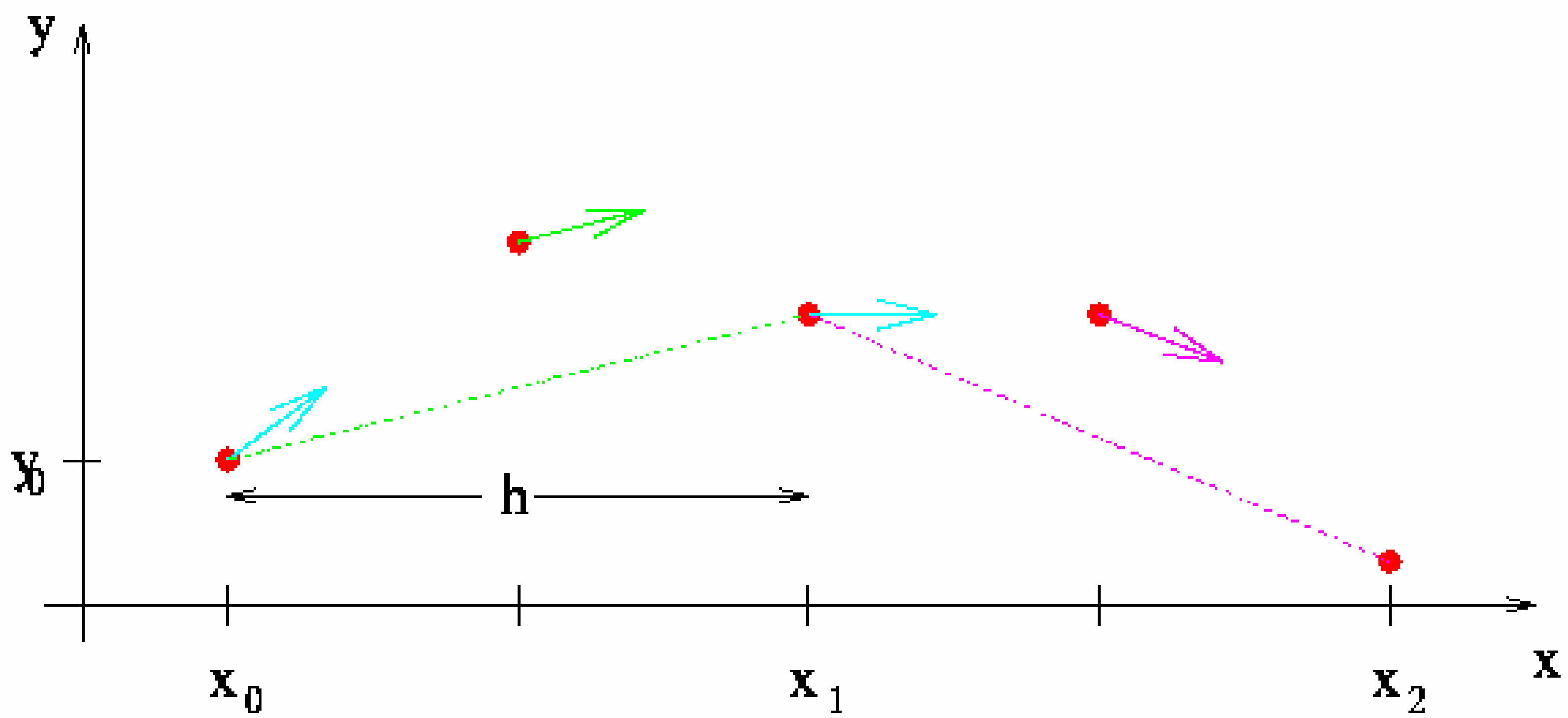
מ.ש.ל.

השגיאה היא: $O(h^3)$

שיטה זו במילים:

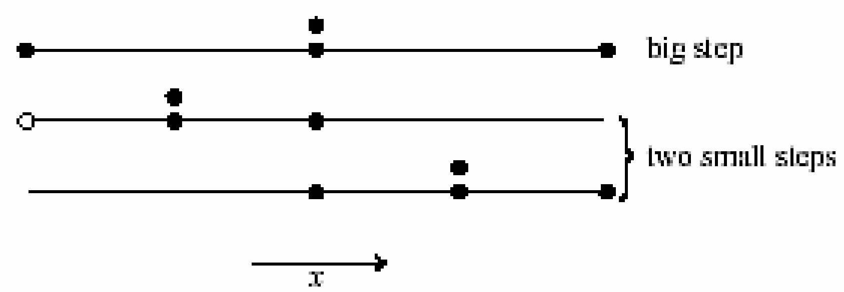
מתקדמים לפי הנגזרת בתחילת הצעד, עד האמצע, ז"א ל- $x = x_n + \frac{1}{2}h$.
אז מוצאים את הנגזרת f בנקודה זו, חוזרים להתחלה,
ומשתמשים בנגזרת זו לצעד השלם.

למשל, שני צעדים של שיטת Runge-Kutta מסדר שני:



<u>קביעת גודל הצעד:</u> Runge-Kutta מסדר רביעי

את גודל הצעד נקבע ע"פ הדיוק הנדרש. קודם כל צריך הערכה של השגיאה. עושים צעד פעם אחת, ואז חוזרים עליו עם שני חצאי צעדים. משווים תוצאות. (הערה: יש דמיון לשיטת רומברג לאינטגרציה.) נקרא לצעד המלא Δx=2h .



בצעד אחד מלא, השגיאה בערך שקיבלנו (נקרא לו y_1) היא מסדר חמישי בגודל הצעד, אז אם נקרא למקדם ϕ(שקשור לנגזרות של f), נוכל לכתוב:

$$y(x+2h) - y_1 = (2h)^5\phi + O(h^6)$$

בחצי צעד, השגיאה (בערך y_2) היא:

$$y(x+h) - y_2 = h^5\phi + O(h^6)$$

קביעת גודל הצעד :Runge-Kutta

בחצי צעד הנוסף, מ- x+h ל- x+2h, השגיאה היא דומה, כי אפשר להזניח את השינוי ב- ϕ. השגיאה הכוללת (בערך y_3) היא:

$$y(x+2h) - y_3 = 2h^5\phi + O(h^6)$$

לכן, עם מזניחים את h^6 , אפשר למצוא את ϕ :

$$y_3 - y_1 = 30h^5\phi$$

ואז הערכת השגיאה ב- y_3 היא:

$$\triangle = 2h^5\phi = \frac{1}{15}(y_3 - y_1)$$

אם רוצים שגיאה יותר קטנה, Δ_0, אז מקטינים את h:

$$\frac{\triangle_0}{\triangle} = \left(\frac{h_0}{h}\right)^5 \Rightarrow h_0 = h\left(\frac{\triangle_0}{\triangle}\right)^{0.2}$$

קיבלנו גם הערכה יותר מדויקת של התשובה:

$$y_3 + \triangle$$

בגלל ש:

$$y(x+2h) - (y_3 + \triangle) = O(h^6)$$

אבל שימו לב שאת המקדם של h^6 אנחנו לא יודעים.