Fourier Transform טרנספורם פוריה

הגדרה של הטרנספורם הרציף:

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{2\pi i f t}dt$$

והיפוכו:

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{-2\pi i f t}df$$

כאשר t זה זמן ו- f זה תדירות. הרעיון הוא לכתוב את h(t) כסכום של גלים.

הגל: $e^{-2\pi i f t}$ עובר מחזור כל: $\Delta t=\frac{1}{f}$ כי:

$e^{-2\pi i f(t+\frac{1}{f})}=e^{-2\pi i f t}e^{-2\pi i}$ ו: $e^{-2\pi i}=1$

הגל מנורמל לערך מוחלט = 1, לכן המקדם H(f) קובע את החשיבות של התדירות f.

מגדירים גם תדירות זוויתית: $\omega\equiv 2\pi f$ ואז המחזור: $\Delta t=\frac{2\pi}{\omega}$

מגדירים קורלציה של שתי פונקציות:

טרנספורם פוריה

ערך זה מחפש התאמה בין h ל- g בהפרש זמן t .

$$\mathrm{Corr}(g,h) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau+t)h(\tau)\, d\tau$$

קיים קשר בין קורלציה לבין טרנספורם פוריה. <u>משפט הקורלציה:</u>

אם $g(t) \Leftrightarrow G(f)$ (ז"א G היא הטרנספורם של g) ו - $h(t) \Leftrightarrow H(f)$ אז:

$$\mathrm{Corr}(g,h) \Longleftrightarrow G(f)H^*(f)$$

h=g נותן את משפט ווינר-קינצ'ין:

$$\mathrm{Corr}(g,g) \Longleftrightarrow |G(f)|^2 \qquad \text{“Wiener-Khinchin Theorem”}$$

הערך $|G(f)|^2$ מודד את תרומת התדר f לפונקציה g, ונקרא הספקטרום (Power Spectrum) .

חישובים נומריים עוסקים בטרנספורם פוריה בדיד (Discrete).

טרנספורם פוריה בדיד Discrete Fourier Transform

הפונקציה h (הסיגנאל) ידועה רק ב- N נקודות בזמן, כי לא מודדים אותה ברציפות אלא בכל זמן Δ :

$$h_k \equiv h(t_k), \qquad t_k \equiv k\Delta, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

הגדרת הטרנספורם הבדיד כמעין קירוב של הרציף:

$$H(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi i f_n t} dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} h_k \, e^{2\pi i f_n t_k} \Delta$$

עכשיו נשים לב ש-H מחזורית על פי ההגדרה: $H(f_n + \frac{1}{\triangle}) = H(f_n)$

כי: $$2\pi i(f_n + \frac{1}{\triangle})t_k = 2\pi i f_n t_k + 2\pi i k$$

והגלים הם מחזוריים: $$e^{2\pi i k} = 1$$

טרנספורם פוריה

לכן, את H ניתן להגדיר באינטרוול באורך 1/Δ . בד"כ בוחרים את האינטרוול הסימטרי ביחס לאפס:

$$f_n \in \left[-\frac{1}{2\triangle}, \frac{1}{2\triangle} \right]$$

אנחנו גם יודעים שמהערכים של h ב-N נקודות אין טעם לנסות למצוא יותר מ-N ערכים עצמאיים של H. אז נתמקד בערכי H רק ב- N+1 תדרים:

$$f_n \equiv \frac{n}{N\triangle}, \quad n = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \ldots, \frac{N}{2}$$

כאשר חזרנו על אותו ערך של H בשתי נקודות הקצה.

למשל:

$$N = 4: \quad n = -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2$$

$$-\frac{1}{4\triangle} \qquad \frac{1}{4\triangle}$$

$$f = -\frac{1}{2\triangle} \qquad 0 \qquad \frac{1}{2\triangle}$$

טרנספורם פוריה

לתדירות המקסימאלית שמצאנו קוראים גם:

תדירות קריטית:

$$f_c \equiv \frac{1}{2\Delta}$$

בגלל חשיבותה הנוספת: יש הבדל מהותי בין פונקציות עם רוחב פס מוגבל לתחום $[-f_c,f_c]$ לבין פונקציות אחרות.

הגדרה של רוחב פס מוגבל של h:
(Bandwidth limited)

$$H(f) = 0 \text{ for all } |f| \geq f_c$$

כאשר, כמו קודם: $h(t) \Leftrightarrow H(f)$

<u>משפט הדגימה:</u> ניתן להוכיח שפונקציה h, עם רוחב פס מוגבל לתחום זה, ניתן לחשב אותה בכל t רק מדגימות שלה בכל זמן Δ.

מצד שני, אם לפונקציה אין רוחב פס מוגבל כך, אז אם נדגום אותה במרווחים של Δ, לא נקבל את h או H הנכונים. כפי שראינו, כאשר דוגמים את h, ניתן לחשב את H רק בתחום $[-f_c,f_c]$. הספקטרום בתדירויות מחוץ לתחום זה יכנס באופן שגוי לתוך התחום. התופעה נקראת aliasing (תרגום מוטעה).

דוגמא משקף 3 על המסך:

תדירות הגל האמיתית היא: $f=\frac{1}{t_m}$ והפונקציה היא: $h(t)=\cos(2\pi ft)$

דגימה לפי Δ האמצעי: h נראה קבוע, ז"א מודדים כאילו: $"f"=0$

במקרה זה: $\triangle=t_m$ והתדירות הקריטית היא: $f_c=\frac{1}{2\triangle}=\frac{1}{2}f$

אז הספקטרום בתדירות f הגדולה מ- f_c תורגם בטעות אל תוך התחום, ל- “f”=0 .

דגימה לפי Δ הקצר: רואים מחזור כל t_m , לכן מודדים: $"f"=f$

במקרה זה: $\triangle=\frac{1}{2}t_m$ ו - $f_c=f$ לכן אין תרגום מוטעה.

דגימה לפי Δ הארוך: רואים מחזור כל $3t_m$, לכן מודדים: $"f"=\frac{1}{3}f$

במקרה זה: $\triangle=\frac{3}{2}t_m$ ו - $f_c=\frac{1}{3}f$ לכן היה תרגום מוטעה ל- $“f”=f_c$.

טרנספורם פוריה

חישוב נומרי של טרנספורם פוריה בדיד:

נזכיר: הדגימות:

$$h_k \equiv h(t_k), \qquad t_k \equiv k\Delta, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

התדרים:

$$f_n \equiv \frac{n}{N\Delta}, \qquad n = -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2}$$

הטרנספורם:

$$H(f_n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \, e^{2\pi i f_n t_k} \Delta = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k \, e^{2\pi i k n/N}$$

אז מגדירים (ורוצים למצוא את):

$$H_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} h_k \, e^{2\pi i k n/N}$$

טרנספורם פוריה

ניתן להוכיח שההיפוך (ז"א מה- H_n לקבל את ה- h_k בחזרה) הוא:

$$h_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} H_n\, e^{-2\pi i k n/N}$$

אם מגדירים: $W \equiv e^{2\pi i/N}$

אז את הטרנספורם ניתן לכתוב:

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} h_k$$

או בצורת מטריצות:

$$\begin{pmatrix} H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \; W \; \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h \end{pmatrix}$$

נראה כאילו נדרשות $O(N^2)$ פעולות. אבל קיים אלגוריתם FFT.