

תרגול 4 בפיסיקה ב' לביולוגים

מוליכים:

בתוך מוליך השדה הוא תמיד 0 הסיבה לכך היא שמוליך מכיל אלקטרונים חופשיים והמערכת שואפת להיות בשיווי משקל (כלומר שהאלקטרונים לא ינועו במוליך) ולכן ברגע שפועל שדה האלקטרונים מסתדרים במוליך כך שבתוך המוליך השדה הוא 0 וזאת משום שכל עוד לא יתאפס השדה במוליך יפעל כוח על נושאי המטען החופשיים במוליך (האלקטרונים החופשיים) והם ינועו. למוליך עצמו יכול להיות מטען עודף אך מאחר והשדה במוליך חייב להתאפס המטען יתרכז אך ורק על השפה החיצונית של המוליך באופן כזה שתמיד על שפת המוליך השדה הנוצר מאונך לשפת המוליך באותה הנקודה. הערה – מוליך הוא משטח שווה פוטנציאל (יהיה רלוונטי כאשר נלמד על פוטנציאל חשמלי).

תרגילים:

1. נתון מוליך כדורי (לא טעון) המורכב משפה פנימית ברדיוס r_1 ושפה חיצונית r_2 . שמים במרכז המוליך מטען q (חיובי).

א. תאר מה קורה במוליך? מהי צפיפות המטען המשטחית על r_1 ? מהי צפיפות המטען המשטחית על r_2 ?

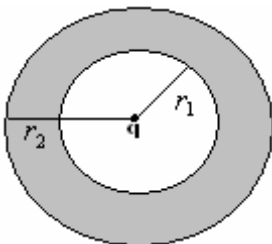
ב. מהו השדה עבור:

i. $r < r_1$

ii. $r_1 \leq r \leq r_2$

iii. $r > r_2$

ג. חזור על א ו-ב עבור אותו המקרה כאשר כעת המוליך טעון במטען $4q$.



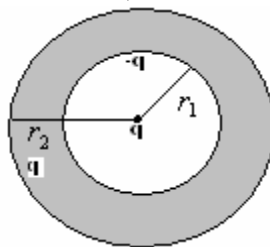
פתרון:

א. בגלל השדה של המטען במרכז המוליך מטען של $-q$ יתפרש על השפה הפנימית (מאחר ומטענים מנוגדים נמשכים) באופן אחיד (בגלל הסימטריה הכדורית) כך שכשנפעיל חוק גאוס בין r_1 ל- r_2 (מעטפת כדורית כמובן) המטען הכלוא בתוך המעטפת יהיה 0 ולכן בתוך המוליך השדה יהיה

0 ולכן צפיפות המטען על השפה הפנימית תהיה $\sigma = \frac{-q}{4\pi r_1^2}$. מאחר והמוליך אינו טעון, סך כל

המטען על המוליך הוא 0 ולכן על השפה החיצונית יצטבר מטען של q (שיתפרש גם הוא באופן אחיד על השפה) יש לציין שמטען זה לא יצור שדה בתוך המוליך מאחר וראינו כי השדה בתוך

קליפה כדורית טעונה הוא 0. צפיפות המטען המשטחית על השפה החיצונית היא $\sigma = \frac{q}{4\pi r_2^2}$.



ב. נשתמש בחוק גאוס על ידי בחירת מעטפת כדורית.

i. עבור $r < r_1$ המטען הכלוא במעטפת הוא q ולכן לפי חוק גאוס

$$E \cdot S = 4\pi kq \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi kq \Rightarrow \vec{E} = \frac{kq}{r^2} \hat{r}$$

ii. עבור $r_1 \leq r \leq r_2$ אנחנו נמצאים בתוך המוליך ולכן לפי הגדרה השדה הוא

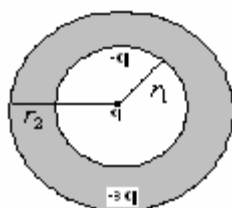
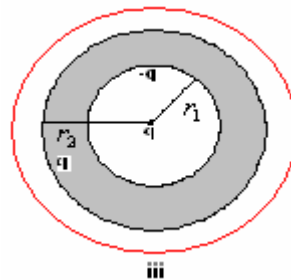
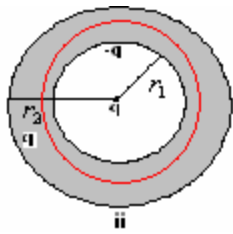
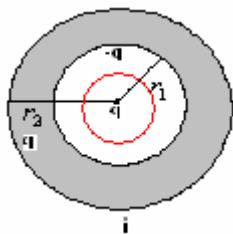
0 וניתן לראות זאת בקלות על ידי הפעלת חוק גאוס מאחר והמטען הכולל

הכלוא בתוך המעטפת הוא $q+(-q)=0$ ולכן השדה הוא 0.

iii. עבור $r_2 < r$ אנחנו נמצאים מחוץ למוליך ושוב נפעיל חוק גאוס והמטען

הכלוא בתוך המעטפת יהיה $q+(-q)+q=q$ ולכן נקבל

$$E \cdot S = 4\pi kq \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi kq \Rightarrow \vec{E} = \frac{kq}{r^2} \hat{r}$$



ג. כעת המוליך טעון במטען $-4q$:

א. בגלל השדה של המטען שבמרכז המוליך מטען של $-q$ יתפרש על השפה הפנימית (מאחר ומטענים מנוגדים נמשכים) באופן אחיד (בגלל הסימטריה הכדורית) כך שכשנפעיל חוק גאוס בין r_1 ל- r_2 (מעטפת כדורית כמובן) המטען הכלוא בתוך המעטפת יהיה 0 ולכן בתוך

המוליך השדה יהיה 0 ולכן צפיפות המטען על השפה הפנימית תהיה $\sigma = \frac{-q}{4\pi r_1^2}$. מאחר

והמוליך אינו טעון, סך כל המטען על המוליך הוא $-4q$ ולכן על השפה החיצונית יצטבר מטען של $-3q$ ($-4q - (-q) = -3q$) (שיתפרש באופן אחיד על השפה החיצונית מאחר והמטען העודף של מוליך מתפרש על השפה החיצונית) יש לציין שמטען זה לא יצור שדה בתוך המוליך מאחר וראינו כי השדה בתוך קליפה כדורית טעונה הוא 0. צפיפות המטען

המשטחית על השפה החיצונית היא $\sigma = \frac{-3q}{4\pi r_2^2}$.

ב. השדה היחיד שישתנה יהיה השדה מחוץ למוליך כלומר רק עבור $r_2 < r$ משום שכעת בתוך המעטפת כלוא מטען של $q - 3q = -2q$ ולכן השדה בחוץ יהיה

$$E \cdot S = 4\pi k(-2q) \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k(-2q) \Rightarrow \vec{E} = -\frac{2kq}{r^2} \hat{r}$$

2. כדור מוליך שרדיוסו a, טעון במטען +Q ועטוף בקליפה כדורית, לא מוליכה, הטעונה במטען -

Q- וצפיפות המטען שלה אחידה. לקליפה רדיוס פנימי b ורדיוס חיצוני c.

א. מהי צפיפות המטען ρ של הקליפה הלא מוליכה?

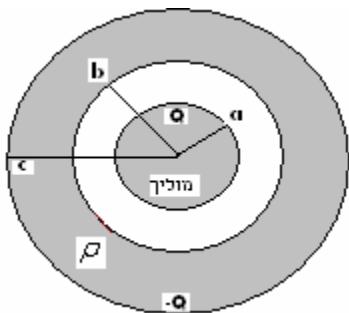
ב. מהו שדה החשמלי בנקודות הבאות:

i. $r < a$

ii. $a < r < b$

iii. $b < r < c$

iv. $r > c$



פתרון:

א. הנפח של הקליפה הלא מוליכה הוא למעשה נפח הכדור החיצוני (בעל רדיוס c) פחות נפח הכדור הפנימי (בעל רדיוס b) ולכן הנפח המתקבל הוא:

$$V = \frac{4}{3}\pi c^3 - \frac{4}{3}\pi b^3 = \frac{4}{3}\pi(c^3 - b^3)$$

$$\rho = \frac{-Q}{V} = \frac{-Q}{\frac{4}{3}\pi(c^3 - b^3)}$$

צפיפות המטען הנפחית של הקליפה היא

ב. נשתמש בחוק גאוס:

i. עבור $r < a$ אנחנו בתוך המוליך. אנו יודעים כי המטען הכולל על המוליך הוא Q ואמרנו כי מטען עודף על מוליך מתפרש על השפה הפנימית ולכן כל המטען Q יתפרש באופן אחיד על השפה לכן למעשה המוליך שקול לקליפה טעונה במטען Q ברדיוס a ולכן בתוך המוליך נקבל שדה 0 (חייב להיות משום שזוהי הגדרה של מוליך).

ii. עבור $a < r < b$ אנחנו מחוץ למוליך השקול לקליפה טעונה וראינו כי השדה מחוץ לקליפה

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2} \hat{r}$$

טעונה הוא

iii. עבור $b < r < c$ אנחנו בתוך הקליפה הטעונה והשדה כאן מורכב מהשדה של המוליך + השדה של הקליפה עצמה.

נשתמש בחוק גאוס על ידי מעטפת כדורית. המטען הכלוא בתוך המעטפת הוא מטען המוליך + המטען הכלוא בין השפה הפנימית של הקליפה הלא מוליכה למעטפת. הנפח בין הרדיוס b (הרדיוס הפנימי של הקליפה) לבין המעטפת הוא נפח כדור ברדיוס r המעטפת - נפח כדור ברדיוס b ולכן הנפח הוא:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi b^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3 - b^3)$$

המטען הכלוא בין המעטפת לשפה הפנימית של הכדור הוא:

$$q_{\text{קליפה}} = \rho V = \frac{-Q}{\frac{4}{3}\pi(c^3 - b^3)} \cdot \frac{4}{3}\pi(r^3 - b^3) = -Q \frac{(r^3 - b^3)}{(c^3 - b^3)}$$

המטען הכולל הכלוא במעטפת הוא:

$$q_{\text{כולל}} = q_{\text{קליפה}} + q_{\text{מוליך}} = -Q \frac{(r^3 - b^3)}{(c^3 - b^3)} + Q$$

כעת נשתמש בחוק גאוס:

$$E \cdot S = 4\pi k q_{\text{כולל}} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k \cdot \left(-Q \frac{(r^3 - b^3)}{(c^3 - b^3)} + Q \right)$$

השדה הכולל הוא:

$$\vec{E} = \frac{k \cdot \left(-Q \frac{(r^3 - b^3)}{(c^3 - b^3)} + Q \right)}{r^2} \hat{r} = \frac{k \cdot \left(Q \frac{(c^3 - r^3)}{(c^3 - b^3)} \right)}{r^2} \hat{r}$$

iv. עבור $r > c$ אנחנו מחוץ למערכת ומאחר וסך כל המטען של המערכת הוא 0 המטען הכלוא בתוך המערכת יהיה 0 ולכן השדה בחוץ יהיה 0.